PRESENTACIÓN

El documento adjunto, titulado *Raíces unitarias ordinarias y estacionales*, elaborado por las profesoras María Guadalupe García Salazar y Lucía A. Ruiz Galindo, es un reporte de investigación del proyecto

Análisis Multivariado de Series de Tiempo,

aprobado por el Consejo Divisional de Ciencias Sociales y Humanidades y registrado con el número 607, cuya responsable es la profesora Lucía A. Ruiz G.

El objetivo de este trabajo es el análisis de las raíces unitarias en los procesos de series de tiempo y el estudio de las pruebas de raíces unitarias que se consideran más importantes, como son las de Dickey y Fuller para las raíces unitarias ordinarias y las de Dickey, Hasza y Fuller y Hylleberg, Engle, Granger y Yoo para raíces unitarias estacionales.

El documento presenta los conceptos básicos que conducen a los procesos estacionarios, a los modelos autorregresivos y de medias móviles y a las pruebas de raíces unitarias tanto ordininarias como estacionales. Se hace hincapíe en la relación que guardan los procesos estacionarios con la existencia de raíces unitarias y se proporcionan los elementos para llevar a cabo las pruebas de raíces unitarias antes mencionadas.

Dra. Beatriz García Castro
Jefa del Departamento de Economía

RAÍCES UNITARIAS ORDINARIAS Y ESTACIONALES

POR
MARÍA GUADALUPE GARCÍA SALAZAR
LUCÍA ATZIMBA RUIZ GALINDO

Reporte de Investigación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
División de Ciencias Sociales y Humanidades
Departamento de Economía

Noviembre, 2012

1. RAÍCES UNITARIAS. PRUEBAS Y APLICACIONES.

El objetivo de este trabajo es doble, el primero es el análisis de las raíces unitarias en los procesos de series de tiempo, en el cual se distinguen dos componentes, una ordinaria y una estacional, y en ambas se pueden presentar raíces unitarias, si ese es el caso se tendrán procesos no estacionarios, que no son susceptibles de ser modelados a través de procesos autorregresivos y de medias moviles (ARMA), pues ellos requieren que las series sean estacionarias o integradas de orden cero, I(0). De aquí la importancia de saber si un proceso de series de tiempo presenta o no raíces unitarias, sean estas ordinarias y/o estacionales.

El segundo objetivo es presentar las pruebas de raíces unitarias que se consideran más importantes, como son las de Dickey y Fuller para las raíces unitarias ordinarias y las de Dickey, Hasza y Fuller y Hylleberg, Engle, Granger y Yoo para raíces unitarias estacionales, estas últimas son planteadas para información trimestral y en todas ellas se parten de procesos autorregresivos de primer orden ordinarios o estacionales, según sea el caso.

Como ya se mencionó, el análisis de las raíces unitarias es de suma importancia en el modelado de una serie de tiempo, pues para formular un modelo es necesario que la serie sea estacionaria o integrada de orden cero, I(0). Cuando no lo es se hacen transformaciones, generalmente diferencias, logaritmos o ambas, hasta encontrar una que sea estacionaria, es esta nueva serie la que es suceptible de ser modelada.

Si la transformción que se utiliza para obtener una serie estacionaria, es la diferencia, entonces se tendrán raíces unitarias que pueden ser ordinarias o estacionales. De esta manera, el estudio de raíces unitarias está ligado al concepto de estacionariedad y la exietencia de una de ellas también indica que se puede encontrar una transformación de la serie original que sí sea estacionaria.

El problema es cómo saber si una serie es estacionaria o no. Una manera de saberlo, es analizar la dinámica de la misma a través de su gráfica. Otra, es estudiar el comportamiento de las autocorrelaciones, mediante su correlograma. Y otra, es hacer pruebas estadísticas, entre las que destacan las de Dickey y Fuller para las raíces unitarias ordinarias y las de Dickey, Hasza y Fuller y Hylleberg, Engle, Granger y Yoo, para raíces unitarias estacionales.

En este documento se presentan los conceptos básicos que conducen por un lado a los procesos estacionarios y por el otro, a las raíces unitarias ordinarias y estacionales. Se demuestran las propiedades de estacionariedad para los procesos autorregresivos y de medias móviles y finalmente y más importante, se estudian las pruebas de raíces unitarias previamente mencionadas.

2. Procesos estocásticos y series de tiempo

El antecedente inmediato del estudio de las raíces unitarias estacionales en el contexto de los modelos de series de tiempo, es el de las raíces unitarias, por ello en esta Sección se presentan los conceptos básicos que conducen a los modelos estacionarios de series de tiempo, se estudia el ruido blanco y se demuestra la estacionariedad de los procesos autorregresivos y de los de medias móviles.

2.1. Conceptos básicos

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias y si ellas dependen del tiempo y son medidas a intervalos regulares de tiempo, entonces representa una serie de tiempo (Maddala y Kim, 2004). En una serie de tiempo se pueden distinguir tres componentes: un componente de tendencia que indica cómo es la dinámica a largo plazo de la serie, un componente estacional que refleja los movimientos que se repiten a periodos regulares de tiempo en series con periodicidad menor a la anual, puede ser semestral, trimestral, mensual, etc., y un componente aleatorio que representa los movimientos que no corresponden a un comportamiento predecible.

Por otra parte, las series pueden clasificarse como estacionarias y no estacionarias, las primeras muestran un comportamiento estable en el tiempo, en cuanto a su tendencia y variabilidad o más específicamente, su media y varianza son constantes y su covarianza no sólo es constante sino que las variables que distan el mismo período tienen la misma covarianza. Mientras que las segundas no cumplen con alguna de estas caraterísticas.

Un conjunto finito de observaciones de la familia de variables aleatorias son una realización del proceso estocástico y en particular de la serie de tiempo, es decir, $\{Z_t\}_{t=1,2,...,T}$ es un conjunto de variables aleatorias ordenadas en el tiempo t, $t = 1, 2, ..., T$, en donde los valores observados de cada una de las variables aleatorias $z_1, \ldots, z_T$ constituyen una realización del proceso estocástico y son a esos valores observados a los que coloquialmente se les nombra serie de tiempo.

Dado que una serie de tiempo es un proceso estocástico, si se conoce la función de distribución conjunta de las variables que lo constituyen, puede ser utilizada para hacer inferencia sobre la dinámica de la serie de tiempo. En la práctica, la construcción de esta función de distribución conjunta no es muy fácil de lograr, por lo que se recurre a los primeros momentos de las variables aleatorias para estudiar las características probabilísticas de las mismas.

Sea un proceso estocástico $\{Z_t\}$, sus momentos de primer orden (media) y los de segundo (varianza y covarianza) estan dados por

$$\begin{aligned} &E(Z_t) = \mu_t && \forall\ t, \quad t = 1, ..., T, \\ &Var(Z_t) = \sigma_t^2 && \forall\ t, \quad t = 1, ..., T, \\ &Cov(Z_t, Z_s) = \gamma_{ts} && \forall\ t \neq s,\ \ t, s = 1, \ldots, T. \end{aligned}$$

donde μ_t, σ_t^2 y γ_{ts} son parámetros desconocidos que deben ser estimados.

Los momentos anteriores se calculan para cada una de las variables aleatorias que conforman el proceso estocástico y por ello, el número de parámetros a estimar es muy grande en comparación con el de elementos de la realización, situación que conduce a estimadores que no satisfacen las propiedades deseables, razón por la que se imponen ciertas restricciones al proceso, se pide que

$$\begin{aligned} &E(Z_t) = \mu\ \ < \infty && \forall\ t, \quad t = 1, ..., T, \\ &Var(Z_t) = \sigma^2\ \ < \infty && \forall\ t, \quad t = 1, ..., T, \\ &Cov(Z_t, Z_{t+k}) = \gamma_k && \forall\ t, \quad t = 1, \ldots, T, k > 0. \end{aligned}$$

Lo anterior establece que tanto la media como la varianza del proceso son constantes, no dependen del tiempo, son finitos y la covarianza entre dos observaciones que distan el mismo número de periodos, k, no sólo es la misma sino que es constante. Los procesos que cumplen con las tres condiciones anteriores se conocen como procesos estocásticos estacionarios. Observe que en este tipo de procesos sólo hay que estimar una media, una varianza y $(T-1)$ covarianzas.

2.2. Procesos estocásticos estacionarios

2.2.1. Proceso puramente aleatorio o ruido blanco

El ruido blanco es un proceso en el cada variable aleatoria en un momento dado (t), se determina por una componente que recoge variaciones asociadas a eventos aleatorios en el periodo t, esto es,

$$Z_t = \varepsilon_t, \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned}
&E(Z_t) = E(\varepsilon_t) = 0,\\
&Var(Z_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2,\\
&Cov(Z_t, Z_{t+k}) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0.
\end{aligned}$$

Por definición este proceso es estacionario. En particular, si ε_t se distribuye como una Normal con media cero y varianza σ^2, entonces se tiene un proceso de ruido blanco normal.

2.2.2. Procesos Autorregresivos

Estos modelos describen un proceso en donde el valor de las variables en un momento dado (t) se determinan mediante la historia de la variable (rezagos) más un ruido blanco que como ya se dijo, introduce variaciones en la serie que no tienen un comportamiento predecible.

Sea el proceso Z_t generado por

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es el ruido blanco y por ello, tiene media cero, varianza σ^2 y no está autocorrelacionado. Este tipo de procesos se denominan $AR(p)$ donde la letra p indica el número de rezagos de la variable Z_t y se conoce como el orden del proceso AR. Estos procesos se pueden expresar en términos del polinomio de rezagos como[1]

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) Z_t \;\; = \;\; \varepsilon_t$$

El caso más sencillo de un proceso autorregresivo es el $AR(1)$,

$$Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

o equivalentemente, en términos del operador de rezagos

$$(1 - \phi_1 L) Z_t = \phi_0 + \varepsilon_t$$

y si $|\phi_1| < 1$ se puede escribir como

$$Z_t = \frac{\phi_0}{(1 - \phi_1)} + \frac{\varepsilon_t}{(1 - \phi_1 L)}.$$

Cuando $|\phi_1| < 1$, los momentos del proceso están dados por [2]

[1]El operador de rezagos denotado por la letra L se define como $L^r Z_t = Z_{t-r}$ para toda t y $r \geq 0$. El polinomio de rezagos, el cual se denota como $\Pi(L)$, se define como

$$\Pi(L) = (1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \cdots - \pi_r L^r) = 1 - \sum_{i=1}^{r} \pi_i L^i,$$

donde r es el número de rezagos.

[2]

$$\begin{aligned}
E(Z_t) &= E\left(\frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 L}\right) = \frac{\phi_0}{(1-\phi_1)} + \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1 L)^j E(\varepsilon_t) = \frac{\phi_0}{(1-\phi_1)} \\
Var(Z_t) &= Var\left(\frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 L}\right) = Var\left(\sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1 L)^j \varepsilon_t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1 L)^{2j} Var(\varepsilon_t) = \frac{\sigma^2}{(1-\phi_1^2)} \\
Cov(Z_t, Z_{t+k}) &= E\left[\left(\frac{\phi_0}{(1-\phi_1)} + \frac{\varepsilon_t}{(1-\phi_1 L)} - \frac{\phi_0}{1-\phi_1}\right)\left(\frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \frac{\varepsilon_{t+k}}{1-\phi_1 L} - \frac{\phi_0}{1-\phi_1}\right)\right] \\
&= E\left[\left(\frac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 L}\right)\left(\frac{\varepsilon_{t+k}}{1-\phi_1 L}\right)\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1 L)^j \varepsilon_t\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1 L)^j \varepsilon_{t+k}\right)\right] \\
&= E(\phi_1^k \varepsilon_t^2 + \phi_1 \phi_1^{k+1} \varepsilon_{t-1}^2 + \phi_1^2 \phi_1^{k+2} \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots) = (\phi_1^k + \phi_1 \phi_1^{k+1} + \phi_1^2 \phi_1^{k+2} + \cdots)\sigma^2 \\
&= (\sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1^j \phi_1^{k+j}) + \phi_1^k)\sigma^2 = \sigma^2 \phi_1^k \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} = \frac{\phi_1^k}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2 \qquad k \geq 1.
\end{aligned}$$

$$E(Z_t) = \frac{\phi_0}{(1-\phi_1)},$$
$$Var(Z_t) = \frac{\sigma^2}{(1-\phi_1^2)},$$
$$Cov(Z_t, Z_{t+k}) = \frac{\phi_1^k}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2, \qquad k \geq 1,$$

por tanto, se puede concluir que el proceso es estacionario ya que su media y su varianza son contantes y la covarianza entre dos observaciones sólo depende de la distancia que hay entre ellas, k.

Observe que la restricción $|\phi_1| < 1$ es equivalente a pedir que la raíz a_1 asociada al polinomio de rezago $(1 - \phi_1 L) = 0$ se encuentre fuera del circulo unitario ($|a_1| > 1$), es decir, la raíz asociada al polinomio de rezago está dada por $a_1 = \frac{1}{\phi_1}$ y dado que $|\phi_1| < 1$, se tiene entonces que $|a_1| > 1$. [3] Este resultado puede extenderse al caso de un proceso autorregresivo de orden p, es decir, para que el proceso $AR(p)$ sea estacionario se debe de cumplir que las p raíces asociadas a su polinomio de rezago estén fuera del círculo unitario.

[3] En el caso de un proceso $AR(2)$ ($Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + Z_{t-2}\phi_2 + \varepsilon_t$), el polinomio de rezago asociado es $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)$, el cual puede factorizarse como sigue

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = (1 - g_1 L)(1 - g_2 L) = 1 - (g_1 + g_2)L - (-g_1 g_2)L^2$$

de donde se tiene que $\phi_1 = g_1 + g_2$ y $\phi_2 = -g_1 g_2$. Las raíces del polinomio $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)$ están dadas por

$$a_i = \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}, \quad i = 1, 2.$$

Análogamente, si el polinomio de rezago se expresa como $(1-g_1L)(1-g_2L)$, las raíces son $a_i = \frac{1}{g_i}$, $i = 1, 2$. Como

$$Z_t = \frac{\varepsilon_t}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)} = \frac{\varepsilon_t}{(1 - g_1 L)(1 - g_2 L)}$$

se tiene que $|g_i| < 1$ para que $\sum_{j=0}^{\infty} g_i^j$ converja a $\frac{1}{1-g_i}$, $i = 1, 2$.
Esta condición $|g_i| < 1$, $i = 1, 2$, implica
a) Que las raíces del polinomio de rezago estén fuera del circulo unitario, $|a_i| > 1$, y
b) Que $g_1 < 1$, $g_2 < 1$, $-g_1 < 1$, $-g_2 < 1$ y $|g_1 g_2| < 1$, de donde se tiene que $g_1 + g_2 - g_1 g_2 < 1$, $-(g_1 + g_2) - g_1 g_2 < 1$ y $|g_1 g_2| < 1$ y dado que $\phi_1 = g_1 + g_2$ y $\phi_2 = -g_1 g_2$, estas condiciones finalmente se expresan como

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad -\phi_1 + \phi_2 < 1 \quad \text{y} \quad |\phi_2| < 1.$$

.

2.2.3. Procesos de Medias Móviles

Estos procesos se formulan a través del presente y pasado de los ruidos blancos ε_t, esto es,

$$Z_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

y se denotan como $MA(q)$, en donde q se conoce como el orden del proceso e indica el número de rezagos de la variable ε_t.

El caso más sencillo de este tipo de procesos es el $MA(1)$

$$Z_t = \theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

cuyos primeros momentos son[4]

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= \theta_0, \\ Var(Z_t) &= (1+\theta_1^2)\sigma^2, \\ Cov(Z_t, Z_{t+k}) &= \begin{cases} \theta_1\sigma^2, & \text{si } k=1 \\ 0, & \text{si } k \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, como las tres condiciones de estacionariedad se cumplen, entonces el proceso $MA(1)$ es estacionario. En general, un proceso $MA(q)$ siempre es estacionario si se considera que

$$\sum_{i=1}^{q} |\theta_i| > \infty.$$

4

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E(\theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) = \theta_0 \\ Var(Z_t) &= Var(\theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) = (1+\theta_1^2)\sigma^2 \\ Cov(Z_t, Z_{t+k}) &= E[(Z_t - \theta_0)(Z_{t-k} - \theta_0)] = E[(\theta_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(\theta_1\varepsilon_{t-1+k} + \varepsilon_{t+k})] \\ &= E(\theta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1+k} + \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+k} + \theta_1\varepsilon_{t-1+k}\varepsilon_t + \varepsilon_{t+k}\varepsilon_t) \\ &= \begin{cases} \theta_1\sigma^2, & \text{si } k=1 \\ 0, & \text{si } k \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2.4. Procesos Autorregresivos y de Medias Móviles

A parte de los procesos estocásticos mencionados anteriormente existen los procesos $ARMA$, los cuales son una combinación del proceso autoregresivo y del de medias móviles, estos procesos se denotan como $ARMA(p, q)$ en donde la pareja (p, q) indica el orden de la parte autoregresiva y de medias móviles respectivamente. Este proceso se representa como

$$Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Cuando se trabaja con procesos de este tipo y se quiere saber bajo que condiciones es estacionario, se debe recordar que la estacionariedad únicamente depende de la parte autoregresiva del modelo ya que como se mencionó, todos los procesos de medias móviles son estacionarios (Greene, 1999).

3. Pruebas de Raíces Unitarias de Dickey-Fuller

En el caso del proceso $AR(1)$ se vió que la raíz asociada al polinomio de rezagos debe cumplir con la condición de estar fuera del circulo unitario para que el proceso sea estacionario, pero qué pasa cuando ello no sucede. Cuando la raíz es menor a uno la varianza del proceso crece exponencialmente, no es finita, haciendo que el proceso sea no estacionario, y cuando la raíz es uno da lugar al proceso[5]

$$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

con ε_t un proceso de ruido blanco. Este proceso no es estacionario ya que tanto su media como su varianza son funciones del tiempo. De esta forma, si el proceso autoregresivo tiene una raíz unitaria, no es estacionario, en cuyo caso se obtendran diferencias de la variable Z_t hasta obtener una que sí sea estacionaria. Más específicamente, si Z_t no es estacionaria, se aplica una primera diferencia obteniéndose una nueva variable que sí es estacionaria, por ejemplo, en el caso de la caminata aleatoria especificada anteriormente, se obtiene que [6]

$$\nabla Z_t = \varepsilon_t,$$

[5] Proceso que se conoce como caminata aleatoria

[6] El operador diferencia, el cual se denota con el símbolo ∇, se define como $\nabla = (1 - L)$. Aplicado sobre Z_t se tiene $\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ para toda t.

donde ∇Z_t es un ruido blanco, que por definición es estacionario, en este caso se dice que Z_t es integrada de orden 1, $I(1)$, ya que se necesito una diferencia para encontrar una nueva especificación de Z_t que es estacionaria. En general, si Z_t no es estacionaria y después de k diferencias, la variable $\nabla^k Z_t$ sí lo es, entonces Z_t es integrada de orden k y se escribe I(k) y ademas, presenta tendencia estocástica.

Dickey y Fuller en 1979 (Dickey y Fuller, 1979), proporcionan una prueba para determinar la existencia o no de raíz unitaria en tres tipos de procesos autorregresivos: uno sin término independiente y sin tendencia determinista , otro con término independiente y sin tendencia determinista, y el tercero con término independiente y tendencia determinista lineal, estos son de manera respectiva

$$Z_t = \phi_1 Z_t + \varepsilon_t,$$

$$Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

y

$$Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 t + \varepsilon_t$$

donde ϕ_0 es el término independiente y $\phi_0 + \phi_2 t$ representan la tendencia determinista lineal.[7]

Dickey y Fuller proponen hacer una primera diferencia al proceso y después sobre esa nueva especificación se prueba la existencia de raíz unitaria, esto es, si se considera

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

y se aplica una diferencia a ambos lados de la igualdad se tiene la regresión auxiliar

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= \phi_1 Z_{t-1} - Z_{t-1} + \varepsilon_t \\ \nabla Z_t &= (\phi_1 - 1) Z_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

y en esta nueva especificación del proceso se prueban las siguientes hipótesis

$$H_0 : \delta = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \delta < 0$$

[7] Son deterministas porque se conoce la forma funcional de la misma, en caso contrario se denomina tendenica estocástica.

con $\delta = (\phi_1 - 1)$. Ellos proponen el siguiente estadístico de prueba

$$t_c = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{ee(\hat{\phi}_1)},$$

donde $ee(\hat{\phi}_1)$ es el error estándar de $\hat{\phi}_1$.

El estadístico no se distribuye como una t-Student ya que el estimador de ϕ_1 ($\hat{\phi}_1$) no se distribuye como una Normal con media ϕ_1. Por esto mismo, Dickey-Fuller construyen la distribución asintótica de su estadístico de prueba y proporcionan los valores críticos (t_{DF}) a distintos niveles de significancia con los cuales se compara el estadístico calculado (t_c) y así poder tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula (Maddala y Kim, 2004). El criterio para rechazar H_0 es que $t_c \geq t_{DF}$. Rechazar H_0 significa que no existe una raíz unitaria y por ende el proceso Z_t es estacionario. Mientras que no rechazar H_0 implica que existe raíz unitaria, en cuyo caso se tiene que Z_t no es estacionaria.

Las regresiones auxiliares que se utilizan para los procesos con tendencia determinística lineal, especificados con anterioridad, son

$$\nabla Z_t = \phi_0 + (\phi_1 - 1)Z_{t-1} + \varepsilon_t,$$
$$\nabla Z_t = \phi_0 + (\phi_1 - 1)Z_{t-1} + \phi_2 t + \varepsilon_t.$$

En cada regresión auxiliar las hipótesis a probar son las que se especificaron anteriromente y en cada caso Dickey-Fuller proporcionan los valores críticos para tomar la decisión de rechazar o no H_0, de manera que ellos dependen del proceso original. Cabe mencionar que en las pruebas de DF se supone que los ruidos blancos son independientes.

Dickey y Fuller también proponen otra prueba, la prueba Dickey-Fuller Aumentada (DFA), la cual considera que los ruidos blancos están correlacionados. Ante esta situación lo que hacen Dickey-Fuller para eliminar la correlación es incluir m rezagos de la variable Z_t. El valor de m se elige de forma que ε_t sea un ruido blanco.

La prueba de DFA considera los mismos modelos de la prueba DF, pero ahora incorpora m rezagos de Z_t. En el caso sin constante ni tendencia la regresión auxiliar que se usa en esta prueba es

$$\nabla Z_t = \delta Z_{t-1} + \sum_{l=1}^{m} \delta_l \nabla Z_{t-l} + \varepsilon_t$$

en donde se prueba la hipótesis $H_0 : \delta = 0$ y los valores críticos utilizados para decidir el rechazo de H_0 son los mismos que se utilizan en la correspondiente prueba DF.

Estas pruebas son de gran utilidad porque, aparte de decir si Z_t es o no estacionaria, indican cuántas diferencias se deben aplicar al proceso para obtener una transformación del mismo que sea estacionaria.

4. Pruebas de raíces unitarias estacionales

En la Sección anterior se vió que el concepto de raíz unitaria esta íntimamente ligado al de estacionariedad de una serie de tiempo. Una de las causas de la no estacionariedad de una serie es su componente estacional, ya que este contribuye a que la media del proceso no sea constante. En esa Sección también se mostraron las pruebas de Dickey y Fuller (DF y DFA) para detectar raíces unitarias en series no estacionales. A continuación se describen las pruebas Dickey, Hasza y Fuller y la de Hylleberg, Engle, Granger y Yoo que se utilizan para probar la existencia o no de raíces unitarias estacionales y antes, se muestran los conceptos más importantes.

4.1. Conceptos básicos

Una serie de tiempo estacional es una serie que tiene un comportamiento que se repite cada determinado número de periodos dentro de un año. Estas series se pueden clasificar como puramente deterministas, estacionales estacionarias y estacionales integradas (Maddala y Kim, 2004). En este trabajo se está interesado sólo en el último caso.

Las series estacionales deterministas describen un comportamiento en donde las variaciones se repiten con precisión en cada estación del año, es decir, el comportamiento de estas variaciones no cambia su forma. Este tipo de procesos usa variables ficticias en su especificación, por ejemplo

$$Z_t = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i D_{it} + X_t$$

donde D_{it} es una variable ficticia estacional, toma el valor de uno en la estación o periodo i y de cero en otro caso, s indica el número de observaciones (periodos) por año y X_t es un proceso estacionario. Por ejemplo, si se tienen datos trimestrales, s es igual a 4 porque es el número de trimestres en el año e $i = 1$ indica la primera estación.

Las series estacionales también pueden plantearse mediante procesos autorregresivos, de medias móviles y por una combinación de ambos procesos. Un proceso autoregresivo estacional de orden p, un $AR(p)_s$, se especifica de la siguiente manera,

$$Z_t = \phi_s Z_{t-s} + \phi_{2s} Z_{t-2s} + \cdots + \phi_{ps} Z_{t-ps} + \varepsilon_t$$

o bien,

$$(1 - \phi_s L^s - \phi_{2s} L^{2s} - \cdots - \phi_{ps} L^{ps}) Z_t = \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco, $1 - \phi_s L^s - \phi_{2s} L^{2s} - \cdots - \phi_{ps} L^{ps}$ es el polinomio de rezagos estacionales, y L^s es el operador de rezago estacional, $L^s Z_t = Z_{t-s}$. El proceso $AR(p)_s$ será estacionario si las raíces de ese polinomio están fuera del círculo unitario. Por ejemplo, un modelo $AR(1)_{s=4}$ se puede formular como

$$Z_t = \phi_0 + \phi_4 Z_{t-4} + \varepsilon_t,$$
$$(1 - \phi_4 L^4) Z_t = \phi_0 + \varepsilon_t$$

y para que este proceso sea estacionario, la raíces de $(1 - \phi_4 L^4)$ deben de estar fuera del circulo unitario. Algo importante que hay que resaltar es que este polinomio tiene 4 raíces (Ghysels y Osborn, 2001), de manera que se puede escribir como

$$(1 - \phi_4 L^4) = (1 - \phi_4^{1/2} L^2)(1 + \phi_4^{1/2} L^2) = (1 - \phi_4^{1/4} L)(1 + \phi_4^{1/4} L)(1 + i\phi_4^{1/4} L)(1 - i\phi_4^{1/4} L)$$

con $\phi_4 \in (-\infty, \infty)$.

Los procesos estacionales integrados son aquellos que no son estacionarios porque el polinomio de rezagos estacionales tiene una raíz unitaria estacional, y una forma de tener una serie estacional estacionaria es aplicar diferencias estacionales a la serie estacional no estacionaria Z_t.[8] [9] A este respecto, Maddala y Kim (2004) mencionan que una serie Z_t es un proceso estacional integrado si éste tiene raíces unitarias estacionales en su representación autoregresiva.

Si el polinomio de rezagos estacionales es $(1 - L^4)$,

$$(1 - L^4) = (1 - L^2)(1 + L^2) = (1 - L)(1 + L)(1 + iL)(1 - iL)$$

[8] En este contexto una raíz unitaria es aquella cuyo módulo es uno.
[9] Una diferencia estacional se define como $\nabla_s Z_t = Z_t - Z_{t-s}$, note que $\nabla_s Z_t = (1 - L^s) Z_t$.

las raíces de este polinomio son 1, -1, $+i = \sqrt{-1}$, $-i = -\sqrt{-1}$, donde cada una de ellas está asociada a una frecuencia de ω radianes, las variaciones estacionales son oscilaciones periódicas las cuales pueden escribirse a través de funciones trigonométricas.[10] La raíz unitaria corresponde a la frecuencia cero, la raíz -1 corresponde a la frecuencia π y las raíces $\pm i$ corresponden a la frecuencia $\pi/2$.

4.2. Prueba Dickey, Hasza y Fuller

Una de las primeras pruebas propuestas para determinar la existencia de raíces unitarias estacionales fue la de Dickey, Hasza y Fuller (DHF) (Dickey, Hasza y Fuller, 1979), la cual es una generalización de la prueba DF. La prueba DHF considera datos trimestrales ($s = 4$) y parte de un proceso autoregresivo estacional de orden uno, $AR(1)_s$, es decir,

$$Z_t \;=\; \phi_s Z_{t-s} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco. Análogamente a la prueba DF, se transforma Z_t aplicando una diferencia estacional, esto es,

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-s} &= (\phi_s - 1)Z_{t-s} + \varepsilon_t, \\ (1 - L^s)Z_t &= (\phi_s - 1)Z_{t-s} + \varepsilon_t, \\ (1 - L^s)Z_t &= \delta_s Z_{t-s} + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

donde $\delta_s = \phi_s - 1$. En la última especificación de Z_t se prueban la hipótesis

$$H_0 : \delta_s = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \delta_s < 0,$$

bajo la hipótesis nula se tiene que Z_t no es estacionaria, es una serie estacional integrada, lo cual significa que tiene raíces unitarias, bajo la alternativa se tiene que Z_t es una serie estacional estacionaria, no es integrada y por tanto, no tiene raíces unitarias. El estadístico de prueba que ellos proponen es

$$t_{c_s} = \frac{\hat{\phi}_s - 1}{ee(\hat{\phi}_s)},$$

donde $ee(\hat{\phi}_s)$ es el error estándar de $\hat{\phi}_s$. De igual forma que en la prueba DF, este estadístico no tiene una distribución específica, por lo cual Dickey, Hasza y Fuller plantean una

[10] La frecuencia es el número de oscilaciones que se producen en dos momentos consecutivos de tiempo y esta dada por $\omega = \frac{2j\pi}{s}$ radianes, donde $j = 0, ..., s/2$. De manera que cuando se tienen datos trimestrales, hay tres frecuencias, $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ y $\omega = \pi$

distribución asintótica de su estadístico y proporcionan los valores críticos denotados por t_{DHF}, a distintos niveles de significancia, con los cuales se compara el estadístico calculado t_{c_s} y así poder tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula (Ghysels y Osborn, 2001). El criterio para rechazar H_0 es $t_{c_s} \geq t_{DHF}$.

4.3. Prueba Hylleberg, Engle, Granger y Yoo

La prueba de Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (HEGY) (Hylleberg et al, 1990) y es utilizada para probar la existencia de raíces unitarias estacionales para datos trimestrales ($s = 4$) y considera la siguiente regresión auxiliar

$$\nabla_s Z_t = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i D_{it} + \beta_0 t + \beta_1 Z_{1t-1} + \beta_2 Z_{2t-1} + \beta_3 Z_{3t-2} + \beta_4 Z_{3t-1} + \sum_{j=1}^{m} \delta_l \nabla Z_{t-l} + \varepsilon_t$$

donde

$$\begin{aligned} Z_{1t} &= (1 + L + L^2 + L^3) Z_t = Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3} \\ Z_{2t} &= -(1 - L + L^2 - L^3) Z_t = -Z_t + Z_{t-1} - Z_{t-2} + Z_{t-3} \\ Z_{3t} &= -(1 - L^2) Z_t = -Z_t + Z_{t-2}, \end{aligned}$$

D_{it} son variables ficticias estacionales, m es el número de rezagos de la variable Z_t y ε_t es un ruido blanco. Los parámetros β_1, β_2, β_3 y β_4 son los que indican la existencia o no de raíces unitarias estacionales en las distintas frecuencias.

- Si $\beta_1 = 0$ la serie tiene una raíz unitaria de frecuencia cero, en cuyo caso la raíz estacional es uno.

- Si $\beta_2 = 0$ la serie tiene una raíz de frecuencia π, lo que implica una raíz estacional igual a -1,

- Si $\beta_3 = 0$ y $\beta_4 = 0$ la serie tiene raíces unitarias estacionales de frecuencia $\pi/2$, de forma que las raíces estacionales son $\pm i$.

Lo anterior conduce a la prueba de las siguientes hipótesis

$$H_0 : \beta_1 = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \beta_1 < 0,$$

$$H_0 : \beta_2 = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \beta_2 < 0$$

y

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \beta_3 \neq 0 \text{ y/o } \beta_4 \neq 0$$

En cada una de esas pruebas, si no se rechaza H_0 entonces la serie tiene una raíz unitaria en la frecuencia cero, una raíz estacional unitaria en la frecuencia π y dos raíces estacionales unitarias en la frecuencia $\pi/2$, respectivamente. Al igual que en la prueba de DHF, los autores de esta determinan valores críticos t_{HEGY} para las pruebas individuales $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 0$ y F_{HEGY} para probar la hipótesis conjunta $\beta_3 = \beta_4 = 0$.

A través de la prueba HEGY se puede determinar si hay raíces unitarias estacionales y no estacionales. La importancia de contar con esta información es que si se sabe que la serie tiene raíces unitarias, estacionales o no, entonces se pueden concluir dos cosas, la primera es que la serie estacional no es estacionaria y la segunda, que existe la posibilidad de que al diferenciar estacionalmente la serie, la nueva serie sí puede ser estacionaria.

5. Bibliografía

Davidson, R. y J. G. MacKinnon (2004). *Econometric Theory and Methods*, Oxford.

Ghysels, E. y Osborn, D. R. (2001). *The Econometric Analysis of Seasonal Time Series*, Cambridge.

Greene, W. H. (2002). *Econometric Analysis*, Prentice Hall, 5a Ed.

Maddala G. S. y Kim I. M. (2004). *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*, Cambridge.

Veerbek, V. (2004). *A Guide to Modern Econometrics*, Wiley, 2ª Ed.