PRESENTACIÓN

El documento adjunto, titulado *Procesos estocásticos y Series de Tiempo*, elaborado por la Dra. Lucía A. Ruiz Galindo, es un reporte de investigación del proyecto

Análisis Multivariado de Series de Tiempo,

aprobado por el Consejo Divisional de Ciencias Sociales y Humanidades y registrado con el número 607.

El objetivo de este trabajo es presentar las bases del modelado univariado de series de tiempo. En primer lugar se estudia la definición formal de serie de tiempo en el contexto discreto y se proporcionan y analizan las características probabilísticas que debe tener una serie de tiempo para que pueda ser modelada, es decir, se incorpora el concepto de estacionariedad débil o estacionariedad en covarianza.

A continuación se plantean los modelos más importantes y se demuestra que satisfacen las propiedades de estacionariedad en covarianza. Finalmente se llevan a cabo algunas simulaciones de los modelos teóricos para poder observar y comparar la dinámica de series de tiempo que cumplen con las propiedades de estacionariedad de segundo orden y las que violan alguna de ellas.

Dra. Beatriz García Castro
Jefa del Departamento de Economía

PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y SERIES DE TIEMPO

POR
LUCÍA ATZIMBA RUIZ GALINDO

Reporte de Investigación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
División de Ciencias Sociales y Humanidades
Departamento de Economía

Noviembre, 2012

1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y SERIES DE TIEMPO

El objetivo de este trabajo es proporcionar las bases tanto teóricas como empíricas del modelado de series de tiempo univariadas, tema que en los últimos años ha tenido una gran relevancia en el desarrollo de modelos dinámicos. Una motivación importante para el estudio de las series de tiempo es la predicción, es decir, la inquietud de todo ser humano de saber lo que pasará en el futuro conociendo el pasado y el presente. El objetivo primordial de la predicción es el poder planificar, prever o prevenir y existen diversos mecanismos para predecir.

Al modelar una serie de tiempo se pretende reproducir la evolución de una variable aleatoria medida a intervalos regulares de tiempo y a partir de ello, predecir su comportamiento. La variable de interés puede ser de cualquier tipo, económica, demográfica, física, medica, biológica, meteorológica, geofísica, etc., lo importante es que sea una serie de tiempo.

El modelado de las series de tiempo se realiza considerando una variable (modelos univariados) o bien, un conjunto de ellas (modelos multivariados). En los primeros, se modela el comportamiento de una variable a tráves de su historia, es decir, mediante la variable en periodos anteriores, mientras que en los multivariados se modelan al menos dos variables y cada una es explicada por su propia historia y por la historia de las demás en el modelo. Independientemente del contexto del modelado, primero se deberá de efectuar un análisis univariado de la serie o series de tiempo de interés.

El presente trabajo proporciona las bases para modelar series de tiempo univariadas. En primer lugar se estudia las definición formal de serie de tiempo en el contexto discreto y se proporcionan y analizan las características probabilísticas que debe tener una serie de tiempo para que pueda ser modelada, es decir, se incorpora el concepto de estacionariedad débil o estacionariedad en covarianza.

A continuación se plantean los modelos más importantes y se demuestra que satisfacen las propiedades de estacionariedad en covarianza. Finalmente se llevan a cabo algunas simulaciones de los modelos teóricos para poder observar y comparar la dinámica de series de tiempo que cumplen con las propiedades de estacionariedad de segundo orden y las que violan alguna de ellas.

2. Conceptos básicos

Un *proceso estocástico* es una familia o una sucesión infinita de variables aleatorias que dependen de un parámetro o argumento y que en general, se encuentran relacionadas entre si. Cuando ese parámetro es el tiempo y las variables estan ordenadas respecto a él, el proceso representa una serie de tiempo. Más específicamente, una *serie de tiempo* es una colección de variables aleatorias ordenadas en el tiempo, es decir, [1]

$$\{Y_t\}_{-\infty}^{\infty} = \{\ldots, Y_{-2}, Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s, Y_{s+1}, \ldots\} \tag{1}$$

Una *realización de un proceso estocástico* y en particular de una serie de tiempo, es una colección de valores u observaciones tales que para cada t, la variable Y_t del proceso toma uno de ellos. De esta forma, una realización de $\{Y_t\}$ es una sucesión de números reales o equivalentemente, [2]

$$\{\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}, \ldots\}.$$

Es importante señalar que comúnmente, el término series de tiempo suele utilizarse tanto para hacer referencia a la realización como al proceso que la originó.

En muchas situaciones prácticas y en particular, en lo que respecta a las variables económicas, no es posible tener varias realizaciones de una misma serie de tiempo generalmente se observa sólo una, que además, está constituida por un número finito de observaciones, de forma que únicamente se cuenta con resultados para un subconjunto finito de variables aleatorias del proceso estocástico en cuestión. Por esta razón, cuando se hace referencia a una serie de tiempo se piensa coloquialmente, en los valores que toma un subconjunto finito de variables aleatorias, esto es,

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$$

y no en que es una realización de un proceso estocástico, tal y como se ha definido con anterioridad.

[1] Cuando el índice de las variables aleatorias es continuo, el proceso estocástico se denota como $Y(t)$, mientras que cuando es discreto, como Y_t, tal y como se hace a lo largo de este trabajo.

[2] Las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas y los valores que toman, con minúsculas.

3. Caracterización de los procesos estocásticos.

La determinación de las características de un proceso estocástico y por ende de una serie de tiempo, puede llevarse a cabo mediante la función de densidad o de los momentos de las variables aleatorias que lo integran. La primera opción no es muy afortunada, ya que la función de densidad conjunta no es fácil de obtener del conocimiento de las marginales, debido a que hay un número infinito de variables y a la existencia de una estructura de correlación entre ellas. Sin embargo, si se considera que el proceso satisface las condiciones de regularidad referentes a simetría y compatibilidad (Kolmogorov (1933)), entonces puede ser descrito mediante una distribución conjunta de dimensión finita, pero ya que persiste el hecho de que las variables están correlacionadas, la distribución conjunta no es fácil de determinar.

La alternativa viable para caracterizar a los procesos estocásticos es a través de los momentos de las variables, en particular los de primero y segundo orden: media, varianza y covarianza. Cabe mencionar que el supuesto de estacionariedad en covarianza que se define en esta Sección, hace posible que los momentos hasta de segundo orden de las variables aleatorias del proceso, puedan ser aproximados por los correspondientes a una realización que tenga un número considerablemente grande de variables aleatorias. [3]

3.1. Momentos poblacionales de los procesos estocásticos.

Sea $\{Y_t\}$ un proceso estocástico simétrico y compatible, propiedades que garantizan que el proceso se puede caracterizar mediante sus momentos poblacionales con solo un número finito de variables aleatorias. Por esta razón, en lo sucesivo se considerara el subconjunto finito

$$\{Y_t\}_{t=0}^{t=T} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_T\} \tag{2}$$

constituido por T variables, con T suficientemente grande.

Los momentos de primer orden del proceso estocástico son

$$E(Y_t) = \mu_t,\ t = 1, \ldots, T$$

[3] Como cada variable está asociada a un período, el que haya un número suficientemente grande de ellas es equivalente a tener un periodo de análisis suficientemente largo.

y los de segundo

$$Cov(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)] = \gamma_{ts},\ t, s = 1, \ldots, T.$$

Obsérvese en esta expresión que si $t = s$ se obtiene la varianza, que se denotará por γ_t, esto es,

$$Cov(Y_t, Y_t) = Var(Y_t) = \gamma_t.$$

Esas definiciones establecen que cada variable aleatoria del proceso tiene su propia media y varianza, y que medias, varianzas y covarianzas están en función del tiempo. Además, como el proceso consta de T variables aleatorias, se tienen T medias, T varianzas y $(T^2 - T)/2$ covarianzas, de manera que el total de parámetros a estimar es $T(T+3)/2$, muy superior al número de observaciones disponibles, T. Más específicamente, las T observaciones de la realización no son suficientes para estimar los $T(T+3)/2$ parámetros y por tanto, no es posible establecer las principales características del proceso y mucho menos garantizar las propiedades deseables de los estimadores. De esta forma, es necesario reducir el espacio paramétrico, esto es, el número de parámetros a estimar, para ello, se requiere que el proceso estocástico sea estacionario en covarianza (covarianza estacionario, débilmente estacionario o estacionario de segundo orden).

3.2. Procesos estocásticos estacionarios en covarianza.

El proceso $\{Y_t\}$ es *estacionario en covarianza*, si satisface las siguientes propiedades:

$$E(Y_t) = \mu < \infty\ \forall t, \tag{3}$$

$$Var(Y_t) = \gamma_0 < \infty\ \forall t \quad \text{y} \tag{4}$$

$$Cov(Y_t, Y_s) = \gamma_{|t-s|}\ \forall t \neq s. \tag{5}$$

Esta definición plantea que un proceso estocástico estacionario en covarianza debe satisfacer[4]

a) Las variables aleatorias que lo constituyen deben tener la misma media y la misma varianza, cada una de ellas debe ser finita e independiente del tiempo, es decir, constante.

[4] En lo sucesivo, únicamente se estudiaran los procesos con estas características y por ello, se hará referencia a ellos simplemente llamándolos procesos estacionarios.

b) La covarianza de las variables aleatorias depende de $k = |t-s|$, el periodo transcurrido entre las mismas, y no de los distintos momentos en el que se observan.

c) La covarianza de las variables que distan el mismo periodo no solamente es constante sino que es la misma.

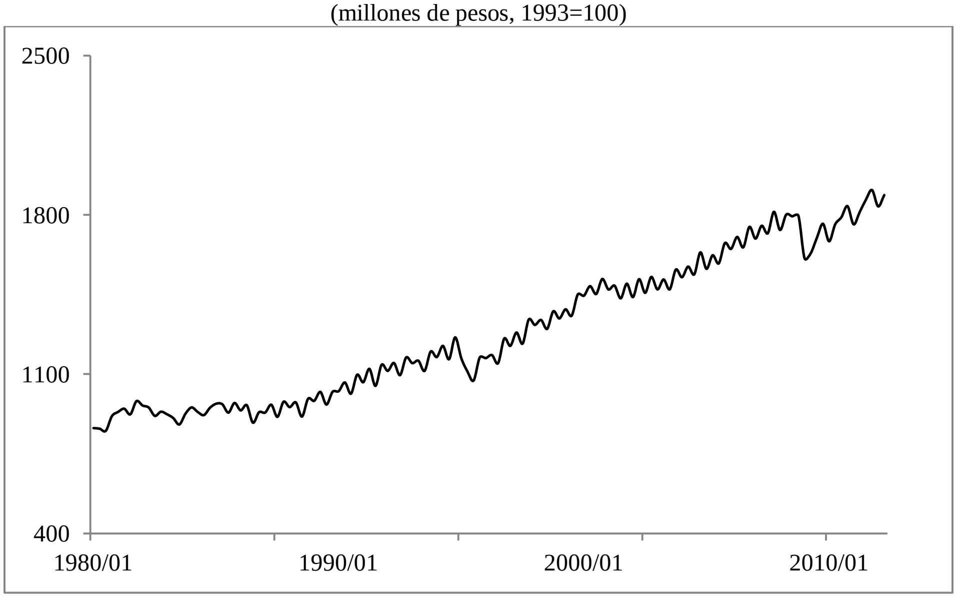
La primera condición de estacionariedad es equivalente a plantear por un lado, que existe un valor: la media del proceso, en torno al cual la serie de tiempo va oscilando y no se aleja de él a medida que transcurre el tiempo. La segunda establece que la varianza es invariante en el tiempo. La tercera implica que las variables aleatorias que distan los mismos períodos tienen la misma relación. De esta forma, para que un proceso estocástico sea estacionario en covarianza sus dos primeros momentos deben ser independientes del tiempo.[5]

Dado el comportamiento de la media, varianza y covarianzas de un proceso estacionario, se espera que la gráfica de una realización se mueva alrededor de un nivel fijo y dentro de una banda no muy ancha, de manera que esto último garantice que la varianza y las covarianzas de variables que disten el mismo periodo, sean constantes. El nivel fijo es su media y generalmente, la magnitud de la banda es dos veces la desviación estándar.

Las gráficas 1 y 2 muestran un par de series de tiempo que no son estacionarias en covarianza. La primera no lo es porque tiene diferentes medias y la segunda aunque tiene sólo una media, su varianza no es constante durante el periodo considerado. Por su parte, las series de tiempo representadas en la gráfica 3 y 4, sí son estacionarias en covarianza, en ellas, las observaciones que la constituyen oscilan alrededor de la media muestral y lo hacen dentro de una banda.

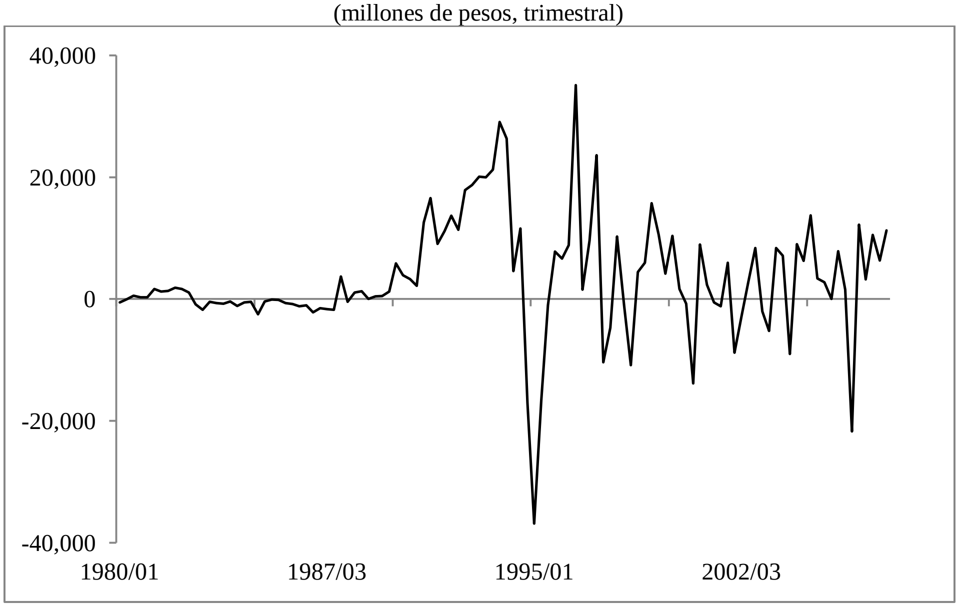
[5] En lo sucesivo, únicamente se estudiaran los procesos con estas características y por ello, se hará referencia a ellos simplemente llamándolos procesos estacionarios.

Gráfica 1
PIB de México
(millones de pesos, 1993=100)



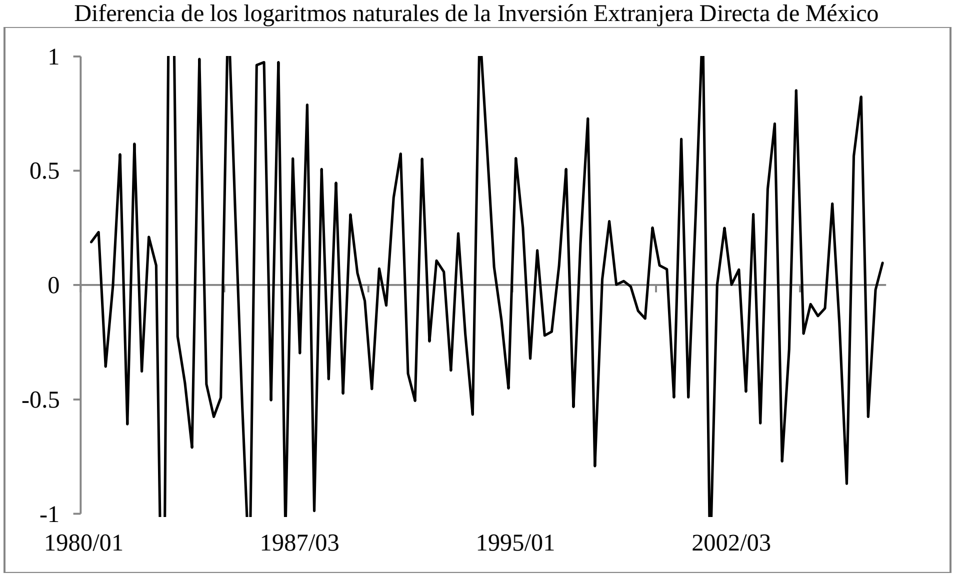
Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI.

Gráfica 2
Inversión Extranjera de Cartera de México
(millones de pesos, trimestral)



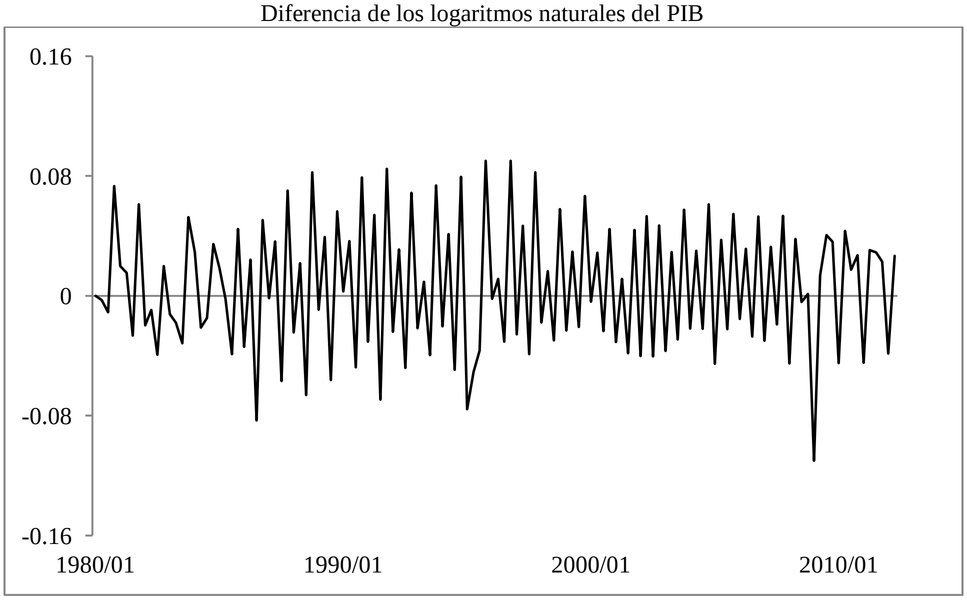
Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI.

Gráfica 3
Diferencia de los logaritmos naturales de la Inversión Extranjera Directa de México



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4
Diferencia de los logaritmos naturales del PIB



Fuente: Elaboración propia.

3.3. Función de autocorrelación.

Debido a que la covarianza presenta problemas con las unidades en las que se miden las variables aleatorias, es una práctica común utilizar en su lugar el coeficiente de correlación, que no es más que el resultado de estandarizar la covarianza. La *correlación de orden k*, ρ_k, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, es definida como

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{Var(Y_t)}\sqrt{Var(Y_{t+k})}}, \tag{6}$$

cuando el proceso es estacionario en covarianza,

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}. \tag{7}$$

Dado que tanto la covarianza como la correlación miden el grado de relación de las variables aleatorias del mismo proceso, es decir, la relación de una variable en diferentes momentos, ellas reciben el nombre de *autocovarianza* y *autocorrelación*, respectivamente, y así nos referiremos a ellas en lo sucesivo. Además, si el proceso es estacionario, las autocorrelaciones, al igual que las autocovarianzas, dependen de k, el periodo transcurrido entre las variables, razón por la que se le llama *función de autocorrelción* (FAC).

Observe que independientemente del proceso, si en (7) se hace $k = 0$, se obtiene

$$\rho_0 = 1.$$

Además, como $\gamma_k = \gamma_{-k}$, entonces

$$\rho_k = \rho_{-k},$$

esto es, la FAC es una función simétrica y como $|\gamma_k| \leq \gamma_0$ (¿por que?),

$$|\rho_k| \leq 1.$$

Por las propiedades planteadas previamente, tanto las autocovarianzas como las autocorrelaciones son simétricas alrededor de cero, de forma que para estudiar las relaciones entre las variables basta con analizarlas para $k \geq 0$ o para $k \leq 0$, aún más, puesto que la autocorrelación de orden cero siempre es uno, es suficiente considerar la desigualdad estricta. La gráfica de las ρ_k se le denomina *correlograma* y por lo anterior, basta graficarlas para $k > 0$ o $k < 0$ y se puede excluir ρ_0.

4. Procesos básicos de series de tiempo

4.1. Procesos puramente estacionarios o Ruidos blancos

Una clase muy importante de procesos estacionarios en covarianza son los *ruidos blancos.* El proceso $\{Y_t\} = \{e_t\}\ \forall t$, es un ruido blanco si satisface

$$\begin{aligned} &E(e_t) = 0\ \forall t, \\ &V(e_t) = \sigma^2\ \forall t \ \text{ y} \\ &Cov(e_t, e_s) = 0\ \forall t \neq s. \end{aligned} \tag{8}$$

Dadas las características de las variables aleatorias e_t, es evidente que el proceso es estacionario y además, las variables que lo constituyen no están correlacionadas, ya que su autocovarianza es cero.

De ahora en adelante $\{e_t\}$ denotará un proceso de ruido blanco cuya media es cero, varianza es σ^2 y no está autocorrelacionado, es decir,

$$e_t \sim RB(0, \sigma^2),$$

si además sigue una distribución normal para toda t, se tendrá un ruido blanco gaussiano, es decir,

$$e_t \sim RBG(0, \sigma^2)$$

y por tanto, sus variables e_t serán independientes. La Grafica 5 muestra un ruido blanco gaussiano.

4.2. Procesos con tendencia determinista

El proceso dado por $Y_t = \alpha + v_t$, $v_t \sim iid(0, \sigma^2)$[6] es estacionario, ya que

i) La media es constante

$$E(Y_t) = E(\alpha + v_t) = E(\alpha) = \alpha\ \forall t,$$

[6] Esto quiere decir que las variables aleatorias v_t son independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza σ^2.

ii) la varianza también

$$V(Y_t) = V(\alpha + v_t) = V(v_t) = \sigma^2 \ \forall t$$

y

iii) las covarianzas no sólo son constantes, son cero,

$$Cov(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \alpha)(Y_s - \alpha)] = E(v_t v_s) = E(v_t)E(v_s) = 0 \ \forall t \neq s,$$

la penúltima igualdad se sigue del hecho de que las v_t son independientes.

Sin embargo, el proceso

$$Y_t = \alpha t + v_t$$

no es estacionario porque

$$E(Y_t) = E(\alpha t + v_t) = E(\alpha t) + E(v_t) = \alpha t \ \forall t,$$

lo cual significa que la media no es constante, sino que cambia a medida que transcurre el tiempo.

4.3. Procesos de medias móviles

Los procesos de medias móviles, MA por sus siglas en inglés (*Moving Average*), se caracterizan porque la variable aleatoria Y_t puede ser expresada como un promedio ponderado del valor actual y de los q valores más recientes del proceso de ruido blanco e_t, esto es,

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \ldots + \theta_q e_{t-q} + e_t, \tag{9}$$

donde q es el orden del proceso MA, de manera que el modelo anterior es un modelo de medias móviles de orden q o equivalentemente, es un MA(q), puesto que en él la variable de interés Y_t, se expresa en función de q períodos anteriores del ruido blanco e_t.

Considérese un proceso MA(1), esto es,

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 e_{t-1} + e_t.$$

A continuación se demostrará que este proceso es estacionario.

$$
\begin{aligned}
\text{i) } \mu &= E(Y_t) = E(\theta_0 + \theta_1 e_{t-1} + e_t) \\
&= E(\theta_0) + E(\theta_1 e_{t-1}) + E(e_t) \\
&= \theta_0 + \theta_1 E(e_{t-1}) + E(e_t) \\
&= \theta_0 \ \forall t, \\
\text{ii) } \gamma_0 &= V(Y_t) = V(\theta_0 + \theta_1 e_{t-1} + e_t) \\
&= V(\theta_1 e_{t-1}) + V(e_t) \\
&= \theta_1^2 V(e_{t-1}) + V(e_t) \\
&= \sigma^2(\theta_1^2 + 1) \ \forall t, \\
\text{iii) } \gamma_1 &= Cov(Y_t, Y_{t+1}) = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t+1} - \theta_0)] \\
&= E[(\theta_1 e_{t-1} + e_t)(\theta_1 e_t + e_{t+1})] \\
&= E(\theta_1^2 e_{t-1} e_t + \theta_1 e_{t-1} e_{t+1} + \theta_1 e_t^2 + e_t e_{t+1}) \\
&= \theta_1^2 E(e_{t-1} e_t) + \theta_1 E(e_{t-1} e_{t+1}) + \theta_1 E(e_t^2) + E(e_t e_{t+1}) \\
&= \theta_1 \sigma^2, \\
\gamma_2 &= Cov(Y_t, Y_{t+2}) = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t+2} - \theta_0)] \\
&= E[(\theta_1 e_{t-1} + e_t)(\theta_1 e_{t+1} + e_{t+2})] \\
&= E(\theta_1^2 e_{t-1} e_{t+1} + \theta_1 e_{t-1} e_{t+2} + \theta_1 e_t e_{t+1} + e_t e_{t+2}) \\
&= \theta_1^2 E(e_{t-1} e_{t+1}) + \theta_1 E(e_{t-1} e_{t+2}) + \theta_1 E(e_t e_{t+1}) + E(e_t e_{t+2}) \\
&= 0, \\
&\ \ \vdots \\
\gamma_k &= Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t+k} - \theta_0)] \\
&= E[(\theta_1 e_{t-1} + e_t)(\theta_1 e_{t+k-1} + e_{t+k})] \\
&= E(\theta_1^2 e_{t-1} e_{t+k-1} + \theta_1 e_{t-1} e_{t+k} + \theta_1 e_t e_{t+k-1} + e_t e_{t+k}) \\
&= \theta_1^2 E(e_{t-1} e_{t+k-1}) + \theta_1 E(e_t e_{t+k}) + \theta_1 E(e_t e_{t+k-1}) + E(e_t e_{t+k}) \\
&= 0, \ \forall k > 1.
\end{aligned}
$$

De esta manera, el proceso MA(1) es estacionario. Sus autocovarianzas y autocorrelaciones están dadas de manera respectiva como sigue

$$\gamma_k = \begin{cases} (\theta^2+1)\sigma^2, & \text{si } k=0 \\ \theta\sigma^2, & \text{si } k=1 \\ 0, & \text{si } k>1. \end{cases}$$

y

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k=0 \\ \frac{\theta}{\theta^2+1}, & \text{si } k=1 \\ 0, & \text{si } k>1. \end{cases}$$

4.4. Procesos autorregresivos

Los procesos autorregresivos, AR por sus siglas en inglés (*Autoregressive*), se caracterizan porque la variable aleatoria Y_t es explicada por parte de su historia, es decir, en función de rezagos de ella misma, esto es,

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + e_t, \tag{10}$$

donde p es el orden del proceso AR, es decir, el número de rezagos de Y_t incorporados en la especificación del AR(p), puesto que en él la variable de interés Y_t, se expresa en función de p períodos del ruido blanco Y_t.

El proceso autorregresivo más simple es el AR(1), esto es,

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + e_t,$$

el cual no siempre es estacionario, a continuación se mostrara las condiciones bajo las cuales ese proceso es estacionario. El proceso puede ser formulado usando el operador rezagos, como sigue

$$(1 - \phi_1 L)Y_t = \phi_0 + e_t$$

y si $\phi_1 \neq 1$, como

$$Y_t = \frac{\phi_0}{1-\phi_1 L} + \frac{1}{1-\phi_1 L} e_t.$$

Cuando se satisface que $\mid \phi_1 \mid < 1$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_1 L)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_1 L)^k e_t \\
&= \phi_0(\phi_1^0 L^0 + \phi_1^1 L^1 + \phi_1^2 L^2 + \dots) + \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_1 L)^k e_t \\
&= \phi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_1 L)^k e_t \\
&= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \phi_1^0 e_t + \phi_1^1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \dots \\
&= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^k e_{t-k}.
\end{aligned}$$

Observe que esta expresión corresponde a un modelo MA(∞), de manera que un AR(1) tiene una representación MA(∞).

La media del proceso esta dada por

$$E(Y_t) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1},$$

su varianza es

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= E\left[\left(Y_t - \frac{\phi_0}{1-\phi_1}\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^k e_{t-k}\right)^2\right] \\
&= (\phi_1^0)^2 V(e_t) + (\phi_1^1)^2 V(e_{t-1}) + (\phi_1^2)^2 V(e_{t-2}) + \dots \\
&= \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_1^2)^k \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}
\end{aligned}$$

y la covarianza de orden j esta dada por

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-j}) \\ &= E\left[\left(Y_t - \frac{\phi_0}{1-\phi_1}\right)\left(Y_{t-j} - \frac{\phi_0}{1-\phi_1}\right)\right], \end{aligned}$$

pero dado que

$$\begin{aligned} Y_t - \frac{\phi_0}{1-\phi_1} &= \phi_0 - \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \phi_1 Y_{t-1} + e_t \\ &= \frac{\phi_0 - \phi_0\phi_1 - \phi_0}{1-\phi_1} + \phi_1 Y_{t-1} + e_t \\ &= \phi_1\left(Y_{t-1} - \frac{\phi_0}{1-\phi_1}\right) + e_t, \end{aligned}$$

entonces si se denota

$$Z_t = Y_t - \frac{\phi_0}{1-\phi_1},$$

se tiene el modelo equivalente

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t$$ [7]

y por tanto, la covarianza se puede escribir como

$$\begin{aligned} \gamma_j &= E(Z_t Z_{t-j}) \\ &= E((\phi_1 Z_{t-1} + e_t) Z_{t-j}) \\ &= E(\phi_1 Z_{t-1} Z_{t-j} + e_t Z_{t-j}) \\ &= \phi_1 E(Z_t Z_{t-j}) + E(Z_{t-j} e_t) \\ &= \phi_1 \gamma_{j-1}, \end{aligned}$$

esto es,

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1},$$

[7] Nótese que la media de este proceso es cero y su varianza coincide con la de Y_t

que son conocidas como las ecuaciones de Yule-Walker, a partir de las cuales, de manera recursiva, se pueden obtener las autocovarianzas y por ende, las autocorrelaciones, tal y como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \phi_1\gamma_0 = \frac{\phi_1}{1-\phi_1^2}\sigma^2 \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1, \\
\gamma_2 &= \phi_1\gamma_1 = \phi_1^2\gamma_0 \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \phi_1^2, \\
&\vdots \\
\gamma_k &= \phi_1^k\gamma_0 = \phi_1^k\frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} \quad \text{y} \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k = \rho_1^k.
\end{aligned}$$

No debe olvidarse que el desarrollo anterior es válido si y solo si $\mid \phi \mid < 1$, de manera que $\rho_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Además observe que

i) Si $0 < \phi_1 < 1$, $\rho_k > 0$ para tada k.

ii) Si $-1 < \phi_1 < 0$, ρ_k alterna en signo e inicia con signo negativo.

5. Bibliografía

Davidson, R. y J. G. MacKinnon (2004). *Econometric Theory and Methods*, Oxford.

Ghysels, E. y Osborn, D. R. (2001). *The Econometric Analysis of Seasonal Time Series*, Cambridge.

Greene, W. H. (2002). *Econometric Analysis*, Prentice Hall, 5a Ed.

Maddala G. S. y Kim I. M. (2004). *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*, Cambridge.

Veerbek, V. (2004). *A Guide to Modern Econometrics*, Wiley, 2ª Ed.