Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco

División de Ciencias Sociales y Humanidades

Departamento de Economía

REPORTE DE INVESTIGACIÓN

EXTENSIONES A NOTAS TEORÉTICAS SOBRE EL SENTIDO DEL EQUILIBRIO: DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS COMPLEJOS.

Autores:

Oscar Rogelio Caloca Osorio

Cristian Eduardo Leriche Guzmán

Víctor Manuel Sosa Godínez

Proyecto de investigación # 606. Aprobado en la sesión 105 del 2 de agosto de 1995. El proyecto está vigente desde su aprobación y no tiene fecha de terminación. DIVISIÓN DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES: CATÁLOGO DE INVESTIGACIÓN 2021: https://drive.google.com/file/d/1PbNLB1APYokt4DTFL-_QJ9MCtKR4r5b7/view Proyecto independiente:

“Métodos y enfoques de la economía. Algunos estudios teóricos.”

Línea de conocimiento: Teoría económica. Grado de avance: 95%.

México, Azcapotzalco, 16 de julio de 2021.

FORMATO PARA EL REPORTE DE INVESTIGACIÓN. "Extensiones a Notas Teoréticas sobre el Sentido del Equilibrio: desde la perspectiva de los sistemas dinámicos complejos".

1**. Nombre de los investigadores**: Caloca Osorio, Oscar Rogelio; Leriche Guzmán, Cristian Eduardo; Sosa Godínez, Víctor Manuel.

2. Número del proyecto registrado ante Consejo Divisional: # 606: Métodos y enfoques de la economía. Algunos estudios teóricos.

3. Línea de generación y/o aplicación de conocimiento: Teoría económica.

4. Proyecto de investigación independiente.

5. Título del reporte: Extensiones a Notas Teoréticas sobre el Sentido del Equilibrio: desde la perspectiva de los sistemas dinámicos complejos.

6. Resumen: El presente reporte de investigación corresponde con un panorama breve y general sobre las consideraciones y determinación de situaciones de equilibrio desde la perspectiva de los sistemas dinámicos complejos. Asimismo, este es una extensión de Notas Teoréticas sobre el Sentido del Equilibrio enfocada en la situación asintóticamente estable de un sistema.

7. **Presentación del Dr. Sergio Cámara Izquierdo, Jefe del Departamento de Economía.** El presente reporte de investigación forma parte del proyecto "Métodos y enfoques de la economía. Algunos estudios teóricos." (#606 del Catálogo de proyectos registrados en la DCSH). El proyecto está vigente desde su aprobación y no tiene fecha de terminación. CATÁLOGO DE INVESTIGACIÓN 2021: https://drive.google.com/file/d/1PbNLB1APYokt4DTFL-_QJ9MCtKR4r5b7/view

Cabe señalar que este proyecto tiene como propósito obtener diversos resultados finales de los estudios teóricos que realizan en ese contexto, algunos de carácter exploratorio los autores los consideran como preliminares; por ello, su finalización en su calidad de reportes de investigación tiene,según los autores, el 95% de avance. Esto implica, por supuesto, el que sea a su vez insumo referente para otros estudios. El objetivo, método y desarrollo del reporte están explícitos en la introducción.

8. Reflexiones finales: Son diversas las reflexiones finales que presentamos: la primera, corresponde con la circunstancia de que la idea de equilibrio ha estado erróneamente sujeta a la noción de racionalidad como expresión de la TER. Es por ello, que mostramos una de sus limitantes, la TER no es operativa para toma de decisiones colectivas y menos sociales.

La segunda reflexión comprende que el equilibrio es un estado deseable y que se puede alcanzar no necesariamente a través de un punto fijo en el presente, sino hasta por medio de una tendencia asintóticamente estable en el futuro. En este caso el equilibrio es tendencialmente existe, es único y es estable.

Con la tercera reflexión establecemos que la aplicación a las condiciones de vida como bienestar de la población de la CDMX, lleva a una comprensión de cómo opera la noción de equilibrio. Que puede ser expresada como existente, único y estable a través de los sistemas dinámicos complejos no caóticos, es decir, aquellos que son de punto fijo o ciclo límite y que tendencialmente son de punto fijo en el infinito: Equilibrio Asintóticamente Estables. La CDMX como sistema es no caótico, pero, debido a que tiene dos regiones caóticas y dos no caóticas es un Equilibrio Asintóticamente Estable: en el infinito será un punto fijo.

La última reflexión, dicta sobre las subregiones, donde las regiones 1 y 2 establecen puntos fijos en el espacio tiempo. Por el contrario, las regiones 3 y 4 son inestables y caóticas y forman atractores extraños. Estas últimas son y serán en el mediano plazo regiones expulsadoras de bienestar y deben atenderse por medio de políticas sociales para que alcancen tendencialmente a la región 1 y 2.

9. Bibliografía.

Bolívar, Augusto y Oscar Caloca (2011). "Distribución espacial de la pobreza Distrito Federal de México 1990-2040", en: *Revista Polis número 29*, Chile: Universidad Bolivariana de Chile.

INEGI (2005-2020). *Banco Electrónico de Información Estadística*, México: INEGI.

Leriche, Cristian (2009). "Cambio estructural y financiamiento para el desarrollo. Hacia una erradicación de la pobreza", en *El Cotidiano*, # 156, México, UAM-A.

-------- y Oscar Caloca (2009). "Racionalidad y cooperación: un juego reflexivo". *Revista Análisis económico número 56*, México: UAM-Azcapotzalco.

Caloca, Leriche y Sosa (2018). "La pobreza en las alcaldías de la CDMX: 1990-2030", en *Tiempo Económico*, vol. 13, # 40, México. UAM-A.

-------- (2019). **"**Notas teoréticas sobre el sentido del equilibrio**"**. Serie Reportes de investigación. México: UAM-A, DCSH.

Miller, D. (Comp.) (1997). *Popper escritos selectos*, México: Fondo de Cultura Económica.

Serón, María Marta (2000). *Sistemas no lineales*: *notas de clase*, Colombia: Universidad del Rosario, Mimeo.

Extensiones a Notas Teoréticas sobre el Sentido del Equilibrio: desde la perspectiva de los sistemas dinámicos complejos.

Oscar Rogelio Caloca Osorio[1]

Cristian Eduardo Leriche Guzmán[2]

Víctor Manuel Sosa Godínez[2]

Resumen

El presente reporte de investigación corresponde con un panorama breve y general sobre las consideraciones y determinación de situaciones de equilibrio desde la perspectiva de los sistemas dinámicos complejos. Asimismo, este es una extensión de Notas Teoréticas sobre el Sentido del Equilibrio enfocada en la situación asintóticamente estable de un sistema.

Palabras Clave: Equilibrio, Sistemas Dinámicos Complejos, Teoría del Caos.

Abstract

This research report corresponds to a brief and general panorama on the considerations and determination of equilibrium situations from the perspective of complex dynamic systems. Also, this is an extension of Theoretical Notes on the Sense of Equilibrium focused on the asymptotically stable situation of a system.

Key Words: Equilibrium, Complex Dynamic Systems, Chaos Theory.

I. Introducción.

El equilibrio puede significar diversas cosas, pero, en ciencia social significa lo que sus atributos le dan: existe, es único y es estable. La existencia es indispensable a tal grado que de ello depende su nominación. La unicidad implica que solo hay una solución a la problemática que permite solventarse por este medio, de existir muchas soluciones no se sabría cuál emplear en la búsqueda del mejor resultado y

[1] Profesor-Investigador del Departamento de Sociología de la UAM-Azcapotzalco. E-mail: *oscarcalo8@yahoo.com.mx*

[2] Profesores-Investigadores del Departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco. E-mail: *cristianleriche1@yahoo.com.mx* y *sosgovic2003@yahoo.com.mx*.

si todas son válidas cada quien podría escoger su solución, lo cual no permite un referente único y absoluto sino múltiple y relativo al punto de vista: lo que no brinda objetividad de un ideal abstracto.

La estabilidad lleva a que la unicidad se respete pues de ser el equilibrio inestable bajo circunstancia someras podría llegarse a otros equilibrios relativizando el asunto. La estabilidad brinda certeza de que la existencia y unicidad del equilibrio va a permanecer en el tiempo y con esto logra su consistencia.

El equilibrio, es una categoría que, en un marco abstracto-teorético, es positivo. Pero, que cuando se utiliza en el mundo de la vida es normativo. En este sentido, el equilibrio abstracto-teorético es deseable, pero, ¿se puede alcanzar por parte de las personas de carne y hueso?

Esta es una de las principales connotaciones que se establecerá. Por el momento solo adelantaremos que los individuos corresponden con el equilibrio abstracto-teorético, y las personas corresponden con situaciones en donde el equilibrio puede ser también asintóticamente estable.

Cabe destacar que la diferencia esencial entre acciones de los individuos y acciones de las personas, en este reporte de investigación, deriva del hecho que los individuos son entidades objetivo-meta-racionales, puesto que obedecen principalmente a la Teoría de la Elección Racional [TER], el conjunto de su toma de decisiones es racional y muchos adeptos a esta consideran que si ejecutan acciones racionales obtendrán el premio buscado, pero esto no es así, hasta él individuo racional puede equivocarse, es decir, no está exento de error.

Y, por otra parte, las personas cuentan con un esquema de racionalidad débil o razonabilidad, que implica un grado de racionalidad en correspondencia con sus valoraciones axiológicas, el considerar que cuentan con emociones, empatía y comprenden el entorno individuo-socio-cultural y sobre todo cometen errores [La Teoría del Error].

Ahora bien, la noción de equilibrio del que estamos argumentando, un sentido de equilibrio práctico que se pueda manejar en las Ciencias Sociales, pues tiene implícito la existencia de dos o más entidades [que bien pudiesen estar conformando una sola entidad como el equilibrio corporal]. Puesto que corresponde con un balance.

En este sentido, no trataremos sobre individuos abstracto teoréticos, sino sobre colectividades que, por ende, contienen dos o más individuos. El equilibrio ocurre cuando las partes se encuentran satisfechos con la solución existente que es la única y estable. Esto por supuesto puede ser un dilema, porque en el juego de los prisioneros el equilibrio no otorga la máxima satisfacción de la interacción colectiva [esto lo mostraremos más abajo].

Con base en lo anterior, nuestro objetivo es ampliar teoréticamente las ya expuestas, en otro reporte de investigación, Notas Teoréticas al Sentido del Equilibrio, puesto que la finalidad última es elaborar un libro sobre nuestro principal actor el equilibrio. Ello se logra a través de las siguientes secciones: 1) Racionalidad y Contradicciones de esta, comprende una breve visión de la racionalidad del tipo Teoría de la Elección Racional [TER] y una forma de establecer su crítica para acciones colectivas, 2) Estabilidad Asintótica, donde se establecen sintéticamente las bases matemáticas de la estabilidad asintótica que enmarca la plausibilidad de la existencia de equilibrios asintóticamente estables que llegarán a un punto fijo en el infinito y 3) Se muestra una serie teorética de aplicar a una cuestión empírica esta noción, el resultado sensible corresponde con la dinámica caótica o no de la Ciudad de México [CDMX].

II. Racionalidad y Contradicciones de esta.

En gran parte de los procesos teoréticos de exposición de la negociación esta se relaciona funcionalmente con la concepción normativa de ser humano, es decir, con la concepción del *deber ser* y su respectiva forma de ejecución de acciones, siendo su sustento el supuesto axiomático de racionalidad, que tiene correlato en la Teoría de la Elección Racional [TER].

La cual se configura por el cumplimiento de dos axiomas base. En este sentido, para que una persona sea considerada como racional *debe de* [nótese el énfasis normativo] actuar con base en los axiomas de Completitud y Transitividad, los cuales observamos a continuación:

a) Completitud. Para todo x, y $\in$ X, se tiene x “es tan preferida como” y o y “es tan preferida como” x o ambas. Ó x “es indiferente a y”. Qué es un supuesto de elección, y

b) Transitividad. Para todo x, y, z $\in$ X, si x “es tan preferida como” y e y “es tan preferida como” z, entonces x “es tan preferida como” z. Ó x “es indiferente a” y e y “es indiferente a” z entonces x “es indiferente a” z. Qué es el legítimo supuesto de racionalidad o de consistencia temporal de las elecciones.

Con ello, la adopción de los axiomas de racionalidad individual, según la TER, garantiza que cualquier individuo que busca maximizar su utilidad o satisfacción lo logre. Sin embargo, individuos perfectamente racionales de acuerdo con la TER que entran en un proceso de interacción [colectiva en búsqueda de una situación de equilibrio], muy bien pueden no obtener la maximización de su utilidad o satisfacción, puesto que de la interacción colectiva en principio y social en segundo lugar, se desprende de la incompatibilidad de la racionalidad de acuerdo con la TER y la búsqueda de la máxima utilidad. Esto puede ser visualizado a través del juego el dilema de los prisioneros (véase matriz 1). Donde para encontrar el equilibrio de Nash se subrayan por fila y columna los valores que comparativamente son mayores: esto es por fila 5>3 y 0>-1, por columna 5>3 y 0>-1 quedando subrayados los valores 5 en diferentes casillas y 0,0 en una sola casilla.

MATRIZ 1

JUGADOR B

		Cooperar	Competir
JUGADOR A	Cooperar	(3, 3)	(-1, 5)
	Competir	(5 , -1)	(0 , 0)

Fuente: Elaboración propia con base en: [Leriche y Caloca, 2009].

En este caso en la búsqueda de maximizar la utilidad o de obtener la mayor satisfacción posible, los jugadores racionales, son conducidos por la dinámica a obtener el peor resultado de la interacción, puesto que el equilibrio de Nash se encuentra en la casilla donde todos los valores están subrayados que es (0,0), que está lejos de la utilidad de 5 que maximiza la búsqueda de cada agente racional. Esto indica que siendo racionales los individuos en una interacción colectiva no maximizan su utilidad y, por ende, el sentido de racionalidad como principio de garante de máxima satisfacción en lo colectivo es falso. Por ende, la teoría o debe reformularse o debe de adoptar una hipótesis ad hoc como estrategia inmunizadora ante la refutación (Popper, 1994).

III. Estabilidad Asintótica.

Ahora, mostraremos matemáticamente, dada la crítica de la racionalidad TER, que es factible fuera del equilibrio encontrar situaciones con tendencias al equilibrio o Equilibrio Asintóticamente Estable [AE]. En este sentido, consideremos el sistema estacionario[3]

$x' = f(x)$.(1)

Donde $f: D \rightarrow R^n$ es un mapa local desde un dominio $D \subset R^n$ en R^n.

Supongamos que $x'' \in D$ es un Punto de Equilibrio [PE] de (1), es decir $f(x'') = 0$. Vamos a caracterizar y estudiar la estabilidad de x''. Por conveniencia, vamos a asumir que $x'' = 0$ (esto no nos hace perder generalidad porque, si no es así, definimos $y = x - x''$ y trabajamos con la ecuación $y' = g(y)$, donde $g(y) \triangleq f(y + x'')$, que tiene un equilibrio en el origen).

Definición 1. El PE $x = 0$ de (1) es estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que

$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$

a) inestable si no es estable.

b) asintóticamente estable (AE) si es estable y δ puede elegirse tal que:

$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

Esta definición tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo $t \geq 0$. Esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada, puesto que se requieren condiciones adicionales en el teorema de Lyapunov que van a garantizar la existencia global (en el tiempo) de la solución.

Ahora, es posible determinar la estabilidad en el PE a través de funciones, para ello, se considera que $V: D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable en

[3] Toda esta sección se elaboró con base en [Seron, 2000].

un dominio D ⊂ R^n que contiene el origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (1) está dada por:

$$V^*(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)=(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},...,\frac{\partial V}{\partial x_n})\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x)\end{bmatrix}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Donde, la enunciación de V, permite establecer el primer teorema:

Teorema 1 (Lyapunov). Sea el origen x = 0 un PE de (1) y sea D ⊂R^n un dominio que contiene el origen. Sea V : D →R una función continuamente diferenciable tal que

V(0) = 0 y V(x) > 0 en D - $\{0\}$...(3)

$\mathring{V}(x) \leq 0$ en D…(4)

Entonces x=0 es estable. Más aún , si

$\mathring{V}(x)<0$ en D - $\{0\}$…(5)

Entonces x=0 es AE

Demostración.

Dado ε>0, elijamos r ∈(0,ε] tal que

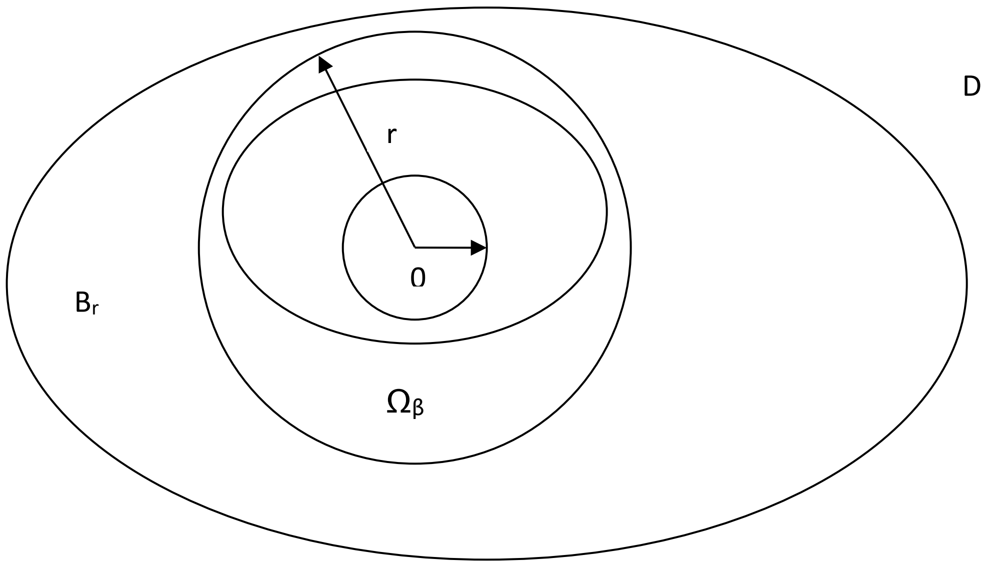
B_r = {x ∈ R^n: ||x||≤r}⊂D

Sea α = $\text{mín}_{||x||=r}$V(x). Entonces α>0 por (2). Tomemos β∈(0, α) y sea

Ω_β = {x∈ B_r | V(x) ≤β}

Entonces Ω_β está en el interior de B_r (véase el esquema 5). El conjunto Ω_β tiene la propiedad

Esquema 5: representación de los conjuntos de la demostración.



Fuente: Elaboración propia con base en (Seron, 2000).

De que toda trayectoria que comienza en Ω_β en t=0 permanece en Ω_β para todo t ≥0. Esto sigue de (4) ya que

$\mathring{V}(x(t)) \leq 0 \rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$, para todo $t \geq 0$

Como Ω_β es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque está contenido en B_r), se concluye que el (1) tiene una solución única definida para todo $t \geq 0$ cuando $x(0) \in \Omega_\beta$. Como V es continua y V(0)=0, existe δ>0 tal que

$||x|| \leq \delta \rightarrow V(x) < \beta$

Entonces

$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$

Y

$x(0) \in B_\delta \rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \rightarrow x(t) \in B_r$, para todo $t \geq 0$

Por lo tanto

$||x(0)|| < \delta \rightarrow ||x(t)|| < r \leq \varepsilon$, para todo $t \geq 0$

Lo que muestra que el PE en x=0 es estable.

Supongamos ahora que (5) también vale. Para mostrar EA debemos probar que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como V es continua y V(0)=0, es suficiente mostrar que

$V(x(t)) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Como V (x(t)) es monotónicamente decreciente y acotada inferiormente por cero,

$V(x(t)) \to c \geq 0$ cuando $t \to \infty$

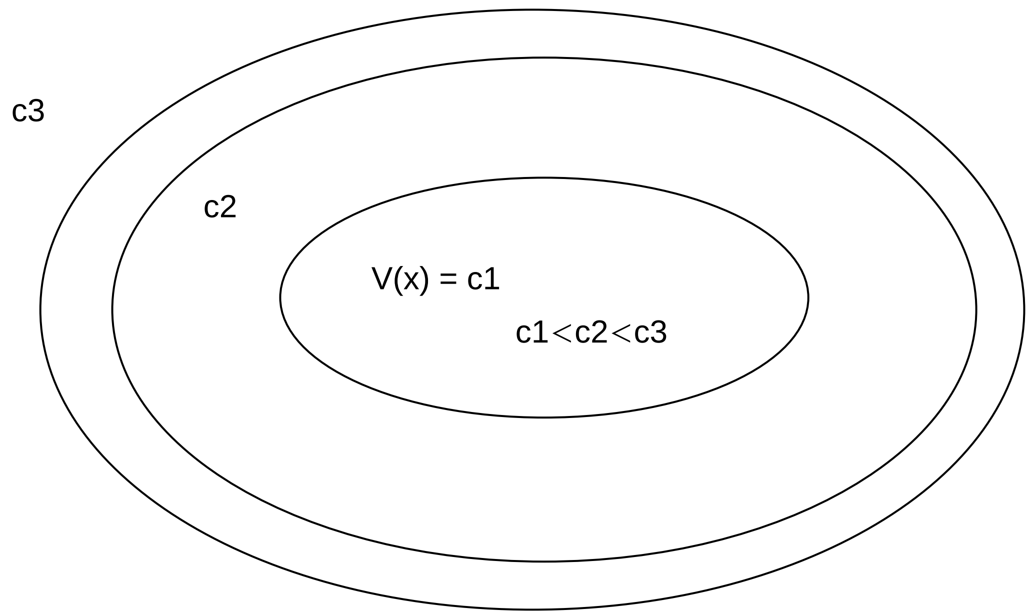
Mostramos que c=0 por contradicción. Supongamos que c>0. Por continuidad de V(x), existe d>0 tal que $B_d \subset \Omega_c$. El límite $V(x(t)) \to c > 0$ implica que la trayectoria x(t) permanece fuera de la bola B_d para todo $t \geq 0$. Sea $-\Upsilon = \text{máx}_{d \leq ||x|| \leq r} \mathring{V}(x)$, el cual existe porque la función continua $\mathring{V}(x)$ alcanza un máximo sobre el conjunto compacto $\{d \leq ||x|| \leq r\}$. Sabemos que $-\gamma < 0$ por (5). Integrando $\mathring{V}(x)$ tenemos que

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \mathring{V}(x(\tau))\, d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Como el lado derecho se va a hacer negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice la suposición de que c>0. qed

En este sentido, una función continuamente diferenciable que satisface (3) y (4) se denomina función de Lyapunov. La superficie V(x)= c se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel. Usando superficies de Lyapunov, (véase el esquema 6: que da una interpretación intuitiva del teorema 1). La condición $\mathring{V} \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov V(x)= c se introduce en el conjunto $\Omega c = \{x \in R^n | V(x) \leq c\}$ y nunca puede salir de él. Cuando $\mathring{V} < 0$, la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un c menor. A medida que c decrece, la superficie de Lyapunov V(x) = c se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t \to \infty$. Si sólo sabemos que $\mathring{V} \leq 0$, no podemos asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir:

Esquema 6: curvas de nivel de una función de Lyapunov



Fuente: Elaboración propia con base en (Seron, 2000).

Que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola B_ε sólo con requerir que el estado inicial x(0) pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

Una función V(x) que satisface (3) se dice definida positiva. Si satisface la condición más débil V(x) ≥0 para x≠0, se dice semidefinida positiva. Una función se dice definida negativa o semidefinida negativa si –V(x) es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Si V(x) no tiene signo definido con respecto a alguno de estos cuatro casos se dice indefinida. El teorema de Lyapunov se puede enunciar, usando esta nueva terminología como: el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable tal que $\mathring{V}(x)$ es semidefinida negativa, y es AE si $\mathring{V}(x)$ es definida negativa.

Ahora, sobre las cuestiones de la región de atracción, tenemos la Estabilidad Asintótica Global (EAG).

Sea φ (t; x) la solución de (1) que comienza en t=0 y supongamos que el origen x=0 es un PE y AE. Definimos como región (dominio) de atracción (RA) del PE al conjunto de todos los puntos x tal que $\text{lím}_{t\to\infty}$ φ (t; x)=0. Es en general difícil o imposible encontrar analíticamente la RA. Sin embargo, se pueden usar funciones de Lyapunov para estimarla en conjuntos contenidos en la RA. Por la prueba del teorema 1 sabemos que existe una función de Lyapunov que satisface las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio D, y si $\Omega_c=\{x\in R^n|V(x)\leq c\}$ está acotado y contenido en D, entonces toda trayectoria que comienza en Ω_c permanece en Ω_c y tiende al origen cuando $t\rightarrow\infty$. Por lo tanto, Ω_c es una estima de la RA. Esta estima puede ser conservadora, es decir, puede ser mucho más chica que la RA real.

Queremos saber bajo que condiciones la RA es todo el espacio R^n. Esto será así si podemos probar que para todo estado inicial x, la trayectoria $\varphi(t; x)$ tiende al origen cuando $t\rightarrow\infty$, sin importar cuan grande es $||x||$. Si un PE AE tiene esta propiedad se dice que es globalmente AE (EAG). Recordando otra vez la prueba del teorema 1 vemos que se puede probar EAG si se puede asegurar que cada punto $x \in R^n$ puede incluirse en el interior de un conjunto acotado Ω_c. Esto no siempre va a ser posible porque para valores grandes de c el conjunto Ω_c puede no ser acotado.

Para ello, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2 (Barbashin-Krasovskii).

Sea x=0 un PE de (1). Sea $V : R^n \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que

$V(0)=0$ y $V(x)>0$ para todo $x\neq0$…6

$||x|| \rightarrow\infty \rightarrow V(x)\rightarrow\infty$…7

$\mathring{V}(x)<0$ para todo $x\neq0$…8

Entonces x=0 es GAE

Demostración.

D *III.2.2 Inestabilidad.*

Vamos a ver un teorema que prueba que un PE es inestable.

Dada c :

1) c o curva de nivel del esquema anterior igual con un punto X evaluado en la función evaluable en el tiempo y positiva, donde

Teorema 2 (Chetaev).

Sea X=0 un PE de un estado estacionario. Existe una función evaluable en el tiempo que lleva a los números reales tal que dicha función evaluada en cero será igual con cero y la función evaluada en x_0 sea positiva para algún x_0 con una distancia arbitrariamente pequeña. Se define el conjunto c como en (5) y suponemos que la evolución de la función es positiva en c. Entonces x=0 es inestable. Esto quiere decir que dado el esquema 5: pasamos de c1 a c2 y de c2 a c3 por lo que nos alejamos del punto de equilibrio y en este caso sr forma u atractor extraño o propiamente caótico.

Para la demostración véase Seron (2000).

Por otra parte, es posible observar que las condiciones espaciales caóticas permiten configurar la existencia de atractores simples y/o extraños. Lo cual, puede ser constatado a través de la evaluación de la caosticidad del sistema de referencia. Dado cualquier punto $p \in R^n$, sea c= V(p). La condición 7 implica que para cualquier c >0, existe r>0 tal que V(x)>c cuando ||x||>r. Por lo tanto, $\Omega_c \subset B_r$, lo que implica que Ω_c es acotado. El resto de la prueba es similar al teorema 1. qed.

Ahora bien, es plausible abordar brevemente la idea matemática de inestabilidad que nos probaría que un sistema dinámico no tiene equilibrio. Teorema que prueba que un PE es inestable:

Dada c:

1) c o curva de nivel del esquema anterior igual con un punto X evaluado en la función evaluable en el tiempo y positiva, donde

Teorema 2 (Chetaev).

Sea X=0 un PE de un estado estacionario. Existe una función evaluable en el tiempo que lleva a los números reales tal que dicha función evaluada en cero será igual con cero y la función evaluada en x_0 sea positiva para algún x_0 con una distancia arbitrariamente pequeña. Se define el conjunto c como en (5) y suponemos que la evolución de la función es positiva en c. Entonces x=0 es inestable. Esto quiere decir que dado el esquema 5: pasamos de c1 a c2 y de c2 a c3 por lo que nos alejamos del punto de equilibrio y en este caso sr forma u atractor extraño o propiamente caótico. Para la demostración véase Seron (2000).

IV. Aplicación: la saturación de bienestar territorial en la CDMX.

Por otra parte, es posible observar que las condiciones espaciales sobre sistemas complejos dinámicos permiten configurar la existencia del caos o Teoría del Caos, ya sea a través de atractores simples: como los de punto fijo [punto de equilibrio] o ciclo límite y/o extraños: como el tipo Lorenz, que no sigue trayectorias precisas y certeras sino, tendencias de comportamiento diferente en cada ciclo a lo largo del espacio-tiempo.

Así, la evaluación del tipo de atractor para las condiciones de vida de la población que son estudiadas en un sistema social que tiene que ver con el territorio, puede establecerse a través de la determinación de si este es un sistema estable o asintóticamente estable o inestable y caótico.

La indagación de esto corresponde con la evaluación de la función que determina tal sistema por medio del llamado exponente de Lyapunov. El cual opera bajo un esquema bivalente, de tal suerte que si el exponente resulta ser positivo; la situación que experimenta el sistema es caótica y, por el contrario, si este es negativo; el sistema esta representado por un atractor simple: de ciclo límite o de punto fijo. La estimación del exponente de Lyapunov corresponde con:

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\log\left| f'(x_i)\right|$$

Donde, las múltiples iteraciones del sistema determinan si este tiene un comportamiento simple o extraño.

IV.1 Equilibrio Asintóticamente Estable en Ciencia Social.

La existencia de equilibrio en Ciencia Social se corresponde con si este es caótico o no en cuyo caso puede ser estable o asintóticamente estable de punto fijo o de ciclo límite. Asimismo, podría ser caótico o inestable, donde se pueden establecer tendencias, pero, no pronósticos con toda la certeza y precisión que el caso amerite.

Así mismo, en esencia el equilibrio tradicional en un sistema determinista se inclina por uno estable de punto fijo. En esencia este debe cumplir con tres requisitos: existencia, unicidad y estabilidad [como más arriba lo mencionamos]. La Existencia, por si misma responde a la cuestión de que hablemos de algo que en realidad pueda encontrarse en el entorno de nuestras múltiples soluciones, se requiere que exista un equilibrio si es que queremos hablar de estabilidad de punto fijo en términos caóticos.

Es decir, argumentamos de algo que en realidad es plausible de poder ser encontrado. Esto conduce a dos tipos de sistemas: los deterministas y los indeterministas, los indeterministas pueden o no tener equilibrio, si es que alguna vez partieron o no de él o tienden o no a él. Empero, los deterministas sobre los que estamos hablando en algún momento en el tiempo les será autoconstruido un equilibrio.

Esto porque, los sistemas deterministas que se conducen de forma teleológica, implican, concurrencia objetivos con metas o de objetivos con una meta en particular constituyéndoles la existencia, por lo menos, de un equilibrio. Lo cual nos lleva a la siguiente cuestión y es que el equilibrio no sólo se requiere que exista sino también que sea único.

Lo cual implica que no volteemos la mirada a múltiples alternativas de solución de nuestro entorno, sino sólo a una y que esta sea la que maximiza. El que tengamos una solución o que el equilibrio sea único lleva, en un sistema determinista a que esta sea la única solución factible de maximizar nuestros objetivos si son bienes y minimizar si son males. Lo que conduce a que nos genere la tercera condición: la estabilidad.

La estabilidad conduce a qué el equilibrio que existe y es único permanezca en el tiempo de esa manera, y si ocurre un movimiento del mismo sea probable objetivamente regresar a él. Así, estas tres condiciones proveen de los elementos necesarios para que un sistema determinista encuentre una correspondencia 1:1 entre sus objetivos y la meta buscada. Y que ello pueda servir de mucho no sólo para la certeza de dicha relación, sino que permita conectar favorablemente el presente ya sea con una retrodicción o con una predicción del sistema.

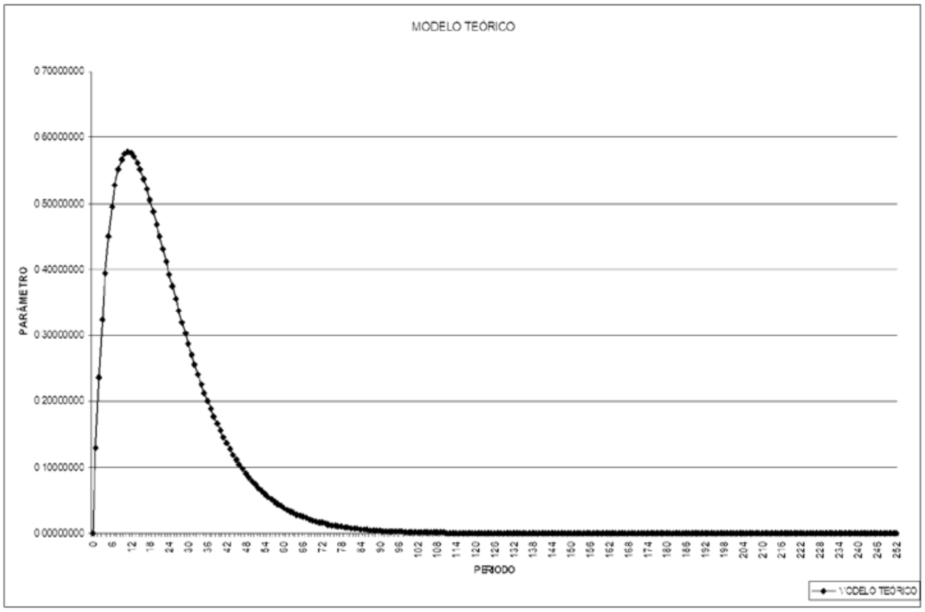
Claro es que el establecimiento de una probabilidad objetiva en busca de hablar de un sistema en el pasado o en el futuro implica establecer una condición de decibilidad. Es decir, que sea posible establecer un valor veritativo a las proposiciones emanadas de dicho sistema. Lo cual, no es otra cosa que argumentar sobre la falsedad o verdad de las condicionantes predictivas del sistema. Es decir, la predicción o la retrodicción es falsa o verdadera en su logro.

Esto tiene importantes consecuencias, no solo para resolver sobre el pasado, sino para resolver sobre el futuro. Un individuo racional considera que el futuro será similar a él futuro y entones predice algo absurdo, que las personas se comportaron de cierta forma y que seguirán comportándose así. Las lecciones de la vida nos han demostrado que esto no ocurre [COVID-19].

Esto es tan absurdo como suponer que se puede esperar lo inesperado que es una clara contradicción: si espero algo es una noción positiva, pero lo inesperado es la negación de lo esperado sobre lo que no sabemos nada [COVID-19] toda una noción negativa y opuesta a la primera. Cómo obtener de una noción negativa una noción positiva: solo a través de convertir lo inesperado-negativo en una proposición esperado positiva pero por definición lo inesperado negativo solo será lo esperado positivo, pues no puede sostenerse algo y su negación sin contradicción lógica alguna, por lo tanto, esta frase es una frase hueca y sin información extra fuera de una simple y mera contradicción.

Así la presentación de un sistema, que en origen es estadísticamente caótico y que tiende a ser un sistema Asintóticamente Estable, como atractor de punto fijo, se establece por medio de una curva de saturación de bienestar territorial, en cuyo caso es AE e igual a cero cuando el tiempo tiende a infinito (véase esquema 1).

Esquema 1: Modelo teórico de saturación de bienestar territorial.



Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, para la enunciación de la aplicación e interpretación de resultados se tomó como referencia el nivel de bienestar bajo y muy bajo de las Áreas Geo-Estadísticas Básicas (AGEB) de las alcaldías de la CDMX entre 1990-2030. Expresado en porcentaje, y que comprende la estimación de un índice de bienestar, el cual, está formado a partir de seis categorías a saber: 1) ingresos precarios menores a dos salarios mínimos, 2) condiciones materiales de la vivienda, 3) servicios dentro de la vivienda, 4) educación principalmente dada por la tasa de analfabetismo y la inasistencia escolar en edad en que las niñas y los niños debiesen asistir, 5) servicios de salud y 6) tenencia de algunos bienes como refrigerador y estufa. Para ello, el índice se estimó a partir del método de componentes principales, el cual corresponde con lo siguiente:

El objetivo de este método es transformar un espacio de representación P en un nuevo espacio P’, en el cual los datos estén incorrelados, llamados componentes principales. Estas nuevas variables son combinaciones lineales de las variables originales y se derivan en orden decreciente de importancia, de manera que la primera componente principal explique tanta variación en los datos originales como sea posible.

La técnica para encontrar esta transformación es llamada análisis de componentes principales. Es una técnica dirigida por las variables que resulta adecuada cuando las variables surgen sobre un fundamento igual; como es el caso de nuestras variables empleadas en el estudio.

Las nuevas variables componentes principales deben ser tales que: a) No estén correlacionadas, b) La primera componente principal explique tanto de la variabilidad en los datos como sea posible y c) Cada componente subsiguiente tome en cuenta tanto de la variabilidad restante como sea posible. En cuyo caso supongamos que $\mathbf{X}^T = [X_1, ..., X_p]$ es una variable aleatoria p-dimensional con media μ y matriz de covarianzas Σ. El problema es encontrar un nuevo conjunto de variables, sea Y_1, Y_2, ...,Y_p, las cuales son no correlacionadas y cuyas varianzas son decrecientes de la primera a la última. Cada Y_j será una combinación lineal de las X, de manera que:

$$Y_j = a_{1j}X_1 + a_{2j}X_2 + ... + a_{pj}X_p \quad = \mathbf{a}_j^T\mathbf{X} \qquad (1)$$

Donde $\mathbf{a}_j^T = [a_{1j,...,}a_{pj}]$ es un vector de constantes. En este sentido, la ecuación (1) contiene un factor de escala arbitrario, por ende, es plausible el imponer una condición de normalización, tal que $\mathbf{a}_j^T\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{p} a_{kj}^2 = 1$. Esta condición asegura que las distancias en el p-espacio se preservan.

De esta manera, el primer componente principal, Y_1, se encuentra eligiendo $\mathbf{a}_1$ de manera tal que la varianza de Y_1 se maximiza. Es decir, se elige $\mathbf{a}_1$ de manera tal que se maximice la varianza de $\mathbf{a}_1^T\mathbf{X}$ sujeta a la condición de normalización $\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1$ =1. Así, el valor máximo de la varianza de $\mathbf{a}_1^T\mathbf{X}$ entre todos los vectores $\mathbf{a}_1$ que satisfacen $\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1$=1 es igual a λ_1, el eigenvalor más grande de Σ, esto ocurre cuando $\mathbf{a}_1$ es un eigenvector de Σ correspondiente al eigenvalor λ_1.

La segunda componente principal, Y_2, se encuentra eligiendo $\mathbf{a}_2$ de manera tal que Y_2 tenga la mayor varianza posible para todas las combinaciones de la forma de la ecuación (1), las cuales no están correlacionadas con Y_1. Es decir, $\mathbf{a}_2$ se elige de modo que la varianza de $\mathbf{a}_2^T\mathbf{X}$ sea un máximo entre todas las combinaciones lineales de **X** que no están correlacionadas con la primera variable componente principal y tenga $\mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2=1$. En tal caso, dicho máximo es igual a λ_2, el segundo eigenvalor más grande de Σ, y que este máximo ocurre cuando $\mathbf{a}_2$ es un eigenvector de Σ correspondiente al eigenvalor λ_2. De manera similar, pueden definirse las componentes principales restantes Y_3, ...,Y_p. La j-ésima componente principal (j = 3,4, ..., *p*) se expresa por $\mathbf{a}_j^T\mathbf{X}$ en donde $\mathbf{a}_j$ se elige de modo que $\mathbf{a}_j^T\mathbf{a}_j=1$ y de forma que la varianza de $\mathbf{a}_j^T\mathbf{X}$ sea un máximo entre todas esas combinaciones lineales de **X** que no estén correlacionadas con las componentes principales restantes. De tal suerte, que este máximo es igual a λ_j, el j-ésimo eigenvalor más grande de Σ y que satisface $\mathbf{a}_j^T\mathbf{a}_j=1$. Por ende, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p$ denotan los eigenvalores ordenados de Σ y $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_p$ denotan los eigenvectores normalizados correspondientes.

Así, si denotamos por A: a la matriz de $p \times p$ de eigenvectores: $A=[\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_p]$ y al vector de $p\times 1$ de componentes principales por **Y**. Entonces:

$$\mathbf{Y} = A^T\mathbf{X} \qquad (2)$$

En este sentido, la matriz de covarianzas de **Y** se denotará por Λ y está dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & & . & . & . & \lambda_p \end{bmatrix}$$

La matriz es diagonal debido a que los componentes se han elegido de manera que no estén correlacionados. Los eigenvalores pueden interpretarse como las respectivas varianzas de los distintos componentes. Si tr(Σ) = $\sigma_{11}+\sigma_{22}+...+\sigma_{pp}$. Por lo tanto, tr($\Sigma$), en cierto sentido, mide la variación total en las variables originales. Por su parte, la suma de las varianzas de los componentes está dada por

$$\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Var}(Y_i) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = \mathrm{tr}(\Lambda)$$

y

$$\mathrm{tr}(\Lambda) = \mathrm{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Var}(X_i)$$

Con ello, se deduce que la suma de las varianzas de las variables originales y las de sus componentes principales son iguales. En otras palabras, la variación total explicada por las variables componentes principales es igual a la cantidad total de la variación medida por las variables originales.

Por lo tanto, el i-ésimo componente principal explica una proporción $\lambda_i / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ de la variación total en los datos originales. De esto se sigue, que los primeros *m* componentes explican una proporción $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ de la variación total.

Y cuyos resultados se exponen en los cuadros 1 y 2, así como el plano de localización de las alcaldías (plano 1), y el correspondiente a la identificación de las cuatro regiones establecidas en la CDMX (plano 2) (Para una referencia de los datos y construcción de las regiones véase Bolívar y Caloca, 2011).

Plano 1: Alcaldías de la CDMX.

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 1: Distancias porcentuales por alcaldía de la CDMX 1990-2030

ALCALDÍA	1990	2000	2010	2020	2030
BENITO JUAREZ	3.63	1.08	1.03	1.02	0.97
CUAUHTEMOC	5.85	9.53	9.23	9.20	9.09
MIGUEL HIDALGO	7.51	9.44	9.15	9.12	9.01
COYOACAN	7.31	7.52	7.28	7.25	7.17
VENUSTIANO CARRANZA	11.11	16.81	16.36	16.28	16.09
AZCAPOTZALCO	14.11	15.20	14.78	14.72	14.54
GUSTAVO A. MADERO	17.00	24.01	23.44	23.32	23.03
IZTACALCO	18.01	18.51	18.03	17.94	17.72
IZTAPALAPA	26.26	39.36	38.59	38.35	37.84
ALVARO OBREGON	27.80	26.07	25.46	25.33	25.01
TLALPAN	32.45	26.32	25.71	25.58	25.25
MAGDALENA CONTRERAS	45.53	49.87	49.04	48.71	48.03
XOCHIMILCO	56.11	54.53	53.69	53.33	52.57
CUAJIMALPA DE MORELOS	60.29	42.04	41.25	40.99	40.44
TLAHUAC	76.28	42.72	41.92	41.66	41.09
MILPA ALTA	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

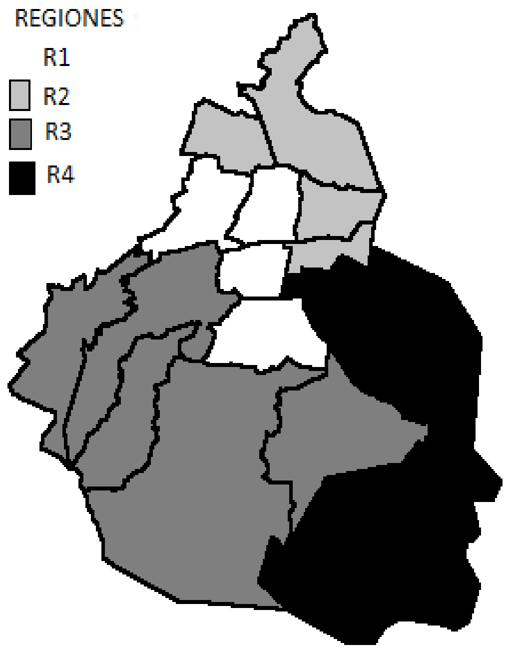
Fuente: Estimación propia.

Cuadro 2: Promedios porcentuales por región de la CDMX 1990-2030.

REGIÓN	1990	2000	2010	2020	2030
R1	6.08	6.89	6.67	6.65	6.56
R2	15.06	18.63	18.15	18.07	17.85
R3	44.44	39.77	39.03	38.79	38.26
R4	67.51	60.69	60.17	60.00	59.64

Fuente: elaboración propia con base en cuadro 1.

Plano 2: Ubicación territorial de las cuatro regiones de las alcaldías de la CDMX.



Fuente: elaboración propia con base en cuadro 2.

Por otra parte, se procede a estimar el exponente de Lyapunov obteniendo los siguientes resultados: en primera instancia el sistema se determina como caótico simple o Asintóticamente Estable (véase cuadro 3), lo cual indica que en el tiempo el bienestar en la CDMX tiende a aumentar y con ello a disminuir la precariedad, siempre y cuando se sigan las políticas públicas de administración adecuadas en la zona.

Empero los resultados no son del todo alentadores (véase cuadro 3) en el caso del análisis para cada región se tiene que: la región 1 y 2 resultan con un exponente de Lyapunov negativo lo cual como es distinto de cero expresa que el nivel de bienestar precario es mínimo y, por ende, asintóticamente estable AE, lo cual refiere a nuestro equilibrio racional pero no TER, y que con el tiempo puede disminuir aun más: esta es la parte alentadora.

Por el contrario, en el caso de las alcaldías que cuentan con los niveles más altos de precariedad el exponente de Lyapunov es positivo. Con ello, se indica que en las regiones 3 y principalmente la 4 lo que se tiene es un atractor caótico o extraño, es decir que se tiende a la inestabilidad del subsistema antes que a su estabilidad y por ende no se tiene un equilibrio ni siquiera AE.

Lo anterior, nos indica que la heterogeneidad del bienestar entre las regiones de las alcaldías de la CDMX, marcan pautas para contar tanto con subsistemas estables como inestables, y que la reducción de la precariedad puede conducir en un futuro a la estabilidad de los subsistemas inestables. Ello, es alentador cada vez que la estabilidad del sistema en general contempla los impactos de todas y cada una de las evoluciones de las alcaldías de la CDMX. Es decir, el sistema en general tiende a ser estable muy a pesar de que existan atractores extraños entre las regiones de las alcaldías de la CDMX.

Cuadro 3: Regiones de la CDMX y exponente de Lyapunov 1990-2030.

REGIÓN	EXPONENTE DE LYAPUNOV
CDMX [SISTEMA]	-0.5253937
R1	-1.3619410
R2	-0.6579327
R3	0.1248381
R4	0.1964473

Fuente: elaboración propia.

Así, el espacio-tiempo y el flujo diacrónico del bienestar en la CDMX entre 1990-2030. Muestra la existencia de equilibrios y desequilibrios, por lo cual se tendrán que establecer políticas sociales encaminadas a mermar la inestabilidad de las regiones 3 y 4. Lo cual, es plausible cada vez que el sistema CDMX tiende al equilibrio.

V. Conclusiones.

Son diversas las reflexiones finales que presentamos: la primera, corresponde con la circunstancia de que la idea de equilibrio ha estado erróneamente sujeta a la noción de racionalidad como expresión de la TER. Es por ello, que mostramos una de sus limitantes, la TER no es operativa para toma de decisiones colectivas y menos sociales.

La segunda reflexión comprende que el equilibrio es un estado deseable y que se puede alcanzar no necesariamente a través de un punto fijo en el presente, sino hasta por medio de una tendencia asintóticamente estable en el futuro. En este caso el equilibrio es tendencialmente existe, es único y es estable.

Con la tercera reflexión establecemos que la aplicación a las condiciones de vida como bienestar de la población de la CDMX, lleva a una comprensión de cómo opera la noción de equilibrio. Que puede ser expresada como existente, único y estable a través de los sistemas dinámicos complejos no caóticos, es decir, aquellos que son de punto fijo o ciclo límite y que tendencialmente son de punto fijo en el infinito: Equilibrio Asintóticamente Estables. La CDMX como sistema es no caótico, pero, debido a que tiene dos regiones caóticas y dos no caóticas es un Equilibrio Asintóticamente Estable: en el infinito será un punto fijo.

La última reflexión, dicta sobre las subregiones, donde, las regiones 1 y 2 establecen puntos fijos en el espacio tiempo. Por el contrario, las regiones 3 y 4; son inestables y caóticas y forman atractores extraños. Estas últimas son y serán en el mediano plazo regiones expulsadoras de bienestar y deben atenderse por medio de políticas sociales para que alcancen tendencialmente a la región 1 y 2.

VI. BibliografÍa.

Bolívar, Augusto y Oscar Caloca (2011). “Distribución espacial de la pobreza Distrito Federal de México 1990-2040”, en: *Revista Polis número 29*, Chile: Universidad Bolivariana de Chile.

INEGI (2005-2020). *Banco Electrónico de Información Estadística*, México: INEGI.

Leriche, Cristian (2009). “Cambio estructural y financiamiento para el desarrollo. Hacia una erradicación de la pobreza”, en *El Cotidiano*, # 156, México, UAM-A.

-------- y Oscar Caloca (2009). “Racionalidad y cooperación: un juego reflexivo”. *Revista Análisis económico número 56*, México: UAM-Azcapotzalco.

Caloca, Leriche y Sosa (2018). “La pobreza en las alcaldías de la CDMX: 1990-2030”, en *Tiempo Económico*, vol. 13, # 40, México. UAM-A.

-------- (2019). **“**Notas teoréticas sobre el sentido del equilibrio**”.** Serie Reportes de investigación. México: UAM-A, DCSH.

Miller, D. (Comp.) (1997). *Popper escritos selectos*, México: Fondo de Cultura Económica.

Seron, María Marta (2000). *Sistemas no lineales*: *notas de clase*, Colombia: Universidad del Rosario, Mimeo.