Estudios teóricos sobre el caos (1).

Oscar Rogelio Caloca Osorio[1]

Cristian Eduardo Leriche Guzmán[2]

Víctor Manuel Sosa Godínez[2]

Resumen

El presente reporte esta enmarcado en nuestros intereses acerca de los llamados fenómenos caótico-deterministas, en el sentido de que algunas problemáticas sociales se presentan como un caos en el sentido griego del término, pero que en realidad lo que ocurre es un desconocimiento de sus variaciones caótico-deterministas. Para ello se toma en consideración que la trayectoria o diacronía de la vida social está enmarcada en un contexto de pautas o patrones no lineales, en primer término, y en segundo que su tendencia a la estabilidad sólo es asintótica. En este caso únicamente se presentan las cuestiones teoréticas que pueden llevar a analizar posteriormente los fenómenos sociales.

Palabras clave: Teoría del caos, Sistemas complejos, Estabilidad, Inestabilidad.

I. Introducción

El determinismo nos refiere a que las múltiples acciones ejecutadas en la vida por cada uno de nosotros, necesariamente, conducen a un fin establecido en el que los medios logran sus fines y donde, todo esta escrito. Una argumentación al respecto dicta que nuestro condicionamiento racional probabilístico objetivo, es suficiente para la determinación de que, con una probabilidad igual a uno, el fenómeno en estudio ocurrirá.

Es decir, que existe un proceso que permite que obtengamos certeza sobre el devenir de los fenómenos en estudio. Esto es cuestionable cada vez que consideramos que todo proceso en la vida mantiene una estrecha relación con la plausibilidad de no ser predicho o retrodicho en estos términos. Sin embargo, esto no excluye la necesidad de utopía, que genera las

[1] Profesor-Investigador del departamento de Sociología de la Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco. E-mail: oscarcalo8@yahoo.com.mx

[2] Profesores-Investigadores del departamento de Economía de la Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco. E-mail: cristianleriche1@yahoo.com.mx y.sosgovic2003@yahoo.com.mx.

condicionantes necesarias para que los individuos actúen en su entorno con una convicción o una confianza sobre los resultados que pudiese esperar.

Esta necesidad de utopía genera la confianza que conduce a especular o predecir el futuro. Lo cual, esta condicionado, según nuestras propuestas científicas con el pasado y el presente, sin embargo, el parcial conocimiento del pasado y presente y aún si fuese posible el conocimiento perfecto del pasado y el presente no nos permite obtener un substancial conocimiento del futuro.

Surge lo inesperado a partir de la constitución de los propios sistemas, aunado a que el futuro es una esperanza, puesto que se requeriría estimar la proporción de entropía generada entre el paso del sistema de un espacio-tiempo determinado a otro: del presente y pasado, a otro espacio-tiempo futuro.

Es por ello, que con la presente investigación se busca dar un panorama a las condiciones de estabilidad e inestabilidad de los sistemas que conllevan a atractores no caóticos o a atractores propiamente caóticos respectivamente. Para ello, se aborda la problemática a través de las siguientes secciones: En la primera, se discurre sobre la cuestión de los sistemas deterministas como condicionamientos invariantes y los sistemas indeterministas como base de una ejemplificación relativa a.

La segunda sección trata brevemente sobre algunas cualidades de los sistemas dinámicos complejos desde aquellos que tienden a la estabilidad hasta aquellos que son caóticos, sin embargo, es menester mencionar que la idea de caos aquí tratada no corresponde con la idea que tenían de ella los griegos [como caos entendían la falta de todo orden], sino de una noción de determinismo caótico. Es decir, se diserta sobre los principales tipos de atractores, estableciendo una recuento del tipo de soluciones de los sistemas dinámicos no-lineales. En la tercera y última sección, se dilucida acerca del nacimiento del caos, por medio del establecer la diferencia entre sistemas estables e inestables, aludiendo a resultados de las investigaciones de Lyapunov.

II. De los procesos deterministas a los indeterministas.

La aprehensión sobre las pautas de evolución de los fenómenos humanos, esta restringida por las propias condiciones de vida que experimentan los sujetos. Esto conduce necesariamente a que dicho proceso dinámico presente dos controvertidas soluciones o que los fenómenos operen bajo un esquema determinista es decir, son relojes perfectos o un esquema indeterminista en grado tal que funcionan como nubes (Popper en Miller, 1997).

En este sentido, se requiere esclarecer que la plausibilidad de estudiar fenómenos sociales bajo esta metodología implica que su comportamiento no es del todo determinista ni del todo indeterminista en materia del presente. En realidad el indeterminismo surge cuando de los fenómenos sociales presentes y pasados se busca extraer conclusiones futuras.

Esto tiene como correlato que los sistemas sociales puedan ser sólo estudiados tendencialmente con un cierto grado de incerteza o con baja certeza. Puesto que socialmente nada está escrito de ahora y para siempre. Debido a que estos no son sistemas del todo deterministas, pero tampoco del todo indetermistas, es decir, no puede establecerse un argumento claro a favor de que al observar cierto fenómeno humano, por medio de la intuición o la investigación científica, pueda preverse su resultado en un futuro determinado.

Esto se debe principalmente a que los seres humanos son entidades racional emotivas con valoraciones axiológicas, empatía y vinculadas, en su gran mayoría, a un contexto cultural de alguna u otra forma. Claro es que la perspectiva científica genera panoramas tendenciales de lo que probablemente ocurrirá [con 0 a 1 de probabilidad], sin embargo, muchas de las veces se desconoce con precisión los resultados.

Ello puede visualizarse en el hecho que las estimaciones científicas tienen un margen de error que esta guiado por un intervalo con límite inferior y superior, que marca el proceso tendencialmente probabilístico y sujeto a la incertidumbre en la que viven los seres humanos.

Lo anterior conlleva a dos cuestiones principales que son difíciles pero no imposibles de existir: uno que se tenga certeza absoluta sobre un fenómeno y dos, que exista una incertidumbre absoluta, la cual, empero ocurre cada vez que se adentra a un nuevo campo en el que por lo regular están suscritas las protociencias.

El desconocimiento total es complejo de identificar porque ni siquiera se piensa que exista hasta que se comienzan las primeras indagaciones intuitivas. De ahí, que hablemos de un caos determinista de los más o menos verdadero, cuyo sentido esta más emparentado con la no-falso de Popper, que con la verdad absoluta.

En este sentido, se argumenta acerca de las tendencias evolutivas sociales sub-determinadas, que tan sólo permite hablar de una certeza asintótica. Donde, el modelo de referencia puede ser modificado en la obtención de sus resultados en tiempo y espacio ante pequeñas modificaciones de los valores de las variables: un modelo sensible a las condiciones iniciales.

Es probable que se consideré como factible un indeterminismo que devenga en un determinismo en función de la existencia de variables ocultas, y que en nuestro caso pudiésemos identificar como la ubicación de un patrón de una o más variables sociales independientes, esto es posible cada vez que no existe un solo ser humano que conozca todas las cosas y las relaciones entre todas las cosas.

Sin embargo, la inclinación es por sistemas caóticos-deterministas con tendencias al indeterminismo. En otras palabras, que el grado de nuestra ignorancia sea tal que no sea posible conocer todos los parámetros que están en juego para la determinación tanto de las proyecciones como de las reproyecciones y que pudiesen estar acompañando a la entropía de los sistemas sociales.

Esto no es otra cosa que considerar la probabilidad de identificar nuevas variables en un futuro, que dado nuestro nivel de conocimiento y herramental para dicho conocimiento de los fenómenos sociales en este momento sea limitado.

II.1 Determinismo. [3]

En el caso del determinismo conviene distinguir entre determinismo físico y determinismo metafísico, en el primer caso decimos que un sistema físico es determinista si su estado en un momento dado determina unívocamente su estado en cualquier otro momento de su existencia. Si la evolución del sistema esta regida por ecuaciones diferenciales, las propiedades matemáticas típicas de estas: existencia y unicidad de las soluciones, aseguran el determinismo del sistema. La representación de un proceso natural mediante un modelo

[3] Toda esta sección se hizo con base en: Sametband (1999).

determinista permite predecir su desarrollo y brinda una comprensión satisfactoria de la necesidad de este.

Por otra parte, el determinismo metafísico puede caracterizarse simplemente como la extrapolación de aquel a todo acontecer. Esta extrapolación tendría sentido si poseyésemos un modelo matemático adecuado del devenir universal en todos sus detalles, aunque no fuéramos capaces de registrar todas las cantidades que fijan cada uno de sus estados, ni de resolver las ecuaciones con arreglo a las cuales estos se suceden. Sin embargo, no contamos con tal modelo, y si alguien lo propusiera, no sería fácil corroborarlo. Esto conduce a que el determinismo metafísico no deje de ser sólo un sueño de la razón: una utopía, cuya falta de base y aun de contenido queda en evidencia al compararlo con los determinismos físicos.

Ahora, no hay que perder de vista dos limitaciones sobre las condiciones de los sistemas deterministas:

1) La predicción de estados futuros y la retrodicción de estados pasados de un sistema determinista tiene como correlato el conocimiento de su estado actual, es decir, estas se basan en la condición presente del estado del sistema. Como es imposible conocerlo con perfecta precisión, la predicción o retrodicción tiene que ser imprecisa, y su inexactitud aumenta con el lapso del tiempo entre el momento actual y el estado predicho o retrodicho. En tal caso, la evolución del sistema, aunque estrictamente determinista, es caótica, como en el caso de muchos sistemas sociales.

2) La evolución determinista del sistema, con base en las ecuaciones diferenciales del modelo con el que se lo representa, está asegurada en la medida en que el sistema determinista sea un sistema cerrado, es decir, ajeno a la influencia de los factores externos, que no se hayan tenido en cuenta en la especificación del estado inicial. Sin embargo, en el mundo social no hay sistemas perfectamente cerrados y se opta por esta opción con la finalidad de reducir el grado de complejidad del modelo que se propone.

II. 2 Indeterminismo.

El considerar la postura que enuncia que todo esta determinado siendo el único problema determinar su causa, corresponde con un mecanismo que no deja pie a la incertidumbre de la vida social y por ende, al indeterminismo de las conductas probabilísticas que ejecutan los individuos en su transitar por el mundo de la vida. Esto necesariamente implica que los individuos pudiesen conocer con exactitud su entorno y las relaciones entre los mismos. Lo cual, empíricamente se demuestra como difícil de cumplir, puesto que, en otras palabras, significa que los individuos se conocen y conocen el universo circundante, y que, con ello, pueden extrapolar esta práctica fuera de nuestro vecindario cósmico.

Lo anterior, por supuesto, se le ha considerado como un mecanismo de explicación “viable” para los fenómenos sociales. Donde, confiriendo a este como un sistema mecanicista es posible identificar con gran exactitud cual es la causa de los fenómenos sociales. Sin embargo, esta manera de ver y buscar explicar los fenómenos sociales, es de origen dudoso, puesto que se basa en un mecanismo de control del tipo newtoniano.

Debido a que en un sin fin de fenómenos sociales aún se esta lejos de conseguir una explicación certera de qué es lo que les determina o en su caso, qué les lleva a que ante someras modificaciones en sus condiciones iniciales se obtengan resultados tan diversos; como en los sistemas caóticos.

Lo anterior, el determinismo, claro es que demerita la existencia de condiciones aleatorias determinando el funcionar de los fenómenos sociales a categorías estables, es decir, el uso de la probabilidad tanto objetiva como subjetiva queda relegada a los designios teleológicos de los sistemas. Esto tiene sus orígenes en la aprobación por parte de los científicos sociales de la teoría de Newton y su argumentación a favor de un mundo determinista. Asimismo, se sujeta a las propuestas racionalistas de corte mecanicista, que lo único que estipulan es un comportamiento causa-efecto del individuo; como es el caso de las propuestas elaboradas por Descartes o los argumentos de La Mettrie de que el hombre es una máquina[4].

En este tipo de inferencias no existe espacio para las alternativas probabilísticas, empero, uno de los principales disidentes del determinismo fue Charles Sanders Peirce, quien “demostró que esta teoría, por muy verídica que fuera, no nos proporciona una razón válida para creer que las nubes son relojes perfectos (…) rechazó la creencia en que este reloj, o cualquier otro,

[4]Para el caso véase (Popper en Miller, 1997: 276).

fuera *perfecto*, o que siquiera se acercara un poco a esa absoluta perfección que el determinismo físico le atribuía." (Popper en Miller, 1997: 266).

La indeterminación esta presente como un juego azaroso, donde el resultado final no esta completamente determinado y existe una gran diversidad de opciones o senderos por seguir. En contrapartida, el individuo, visto como una cosa social, podría estar predeterminado en grado tal que pudiese ser cuestionada su legítima libertad dentro del universo. Puesto que se deja paso al destino y no al libre albedrío. En este sentido, los fenómenos sociales se componen de individuos que no siguen un destino paupérrimo o abundante prefijado, sino que actúan bajo libre albedrío, aún cuando en las dotaciones de recursos iniciales sean menos afortunados unos que otros.

Ello refleja, sin lugar a duda que un individuo predeterminado sólo cumpliría con un patrón de pautas para las que fue programado, y que no podría ejecutar una acción fuera de los confines de lo establecido. Condición que si fuese cierta, entonces, conducirá a la determinación de causas cognoscibles y medibles que enmarcan los comportamientos. Con ello, el sistema social pudiese ser determinado en su totalidad, en este sentido, la evolución de los fenómenos sociales pudiesen ser determinados con exactitud y no con un cierto grado de probabilidad.

Puesto que la realidad nos sugiere que en el mundo social es posible establecer probabilísticamente algunas causas y dejar de lado el estudio de otras. Porque de contar con un individuo que tuviese el conocimiento total sobre las cosas y la relación causal entre estas, entonces este individuo podría resolver, necesariamente, cualesquier dificultad en el mundo. Lo cual no ha sido posible hasta ahora, dado que la evidencia es contundente al respecto: los principales problemas emanados de los fenómenos sociales no se han resuelto: la miseria, la insalubridad y el deterioro medioambiental del planeta.

El indeterminismo social, es sólo una explicación de la evolución de las interacciones entre los individuos de una colectividad. Esto implica que cada acontecimiento social observable y, presumiblemente, medible tiene una causa social observable y probablemente mensurable, que es compatible con el indeterminismo en el sentido de que ninguna métrica puede ser infinitamente precisa.

Ello, refleja la clara oposición respecto de la idea, de que el mundo social es un autómata y que los individuos son subautómatas predeterminados para el cumplimiento de los esquemas deterministas. Por ello, la predictibilidad esta sujeta a márgenes de movilidad en la medición que conducen al reajuste de los modelos empleados para tal fin.

Puesto que todo modelo aún cuando tenga un origen meramente teórico, depende de la estructura del mundo empírico para su falsación, resaltando con ello, que toda orientación de este tipo no considera que exista una predictibilidad certera en el mundo de las acciones de los individuos. Lo que existe es una suerte de tendencia de conocimientos de las probables acciones de los individuos. Debido a que bien “sabemos que nuestras nubes no son efecto del azar perfecto” (Popper en Miller, 1997: 280).

Esto revela que tampoco el indeterminismo puro ofrece algo, puesto que se requiere establecer nociones que contengan un cierto grado de probabilidad de ocurrir; tanto para nuestras predicciones como para las retrodicciones. Esto es, se requiere de soportar un determinismo incompleto o con cierto grado de indeterminismo para las proyecciones que se ejecutaran para la identificación y conocimiento incompleto de los fenómenos sociales, en consecuencia el panorama es la alta sensibilidad de las condiciones iniciales a la transformación de los resultados bajo un esquema de sistemas dinámicos complejos.

III. Sistemas dinámicos complejos

La estructura de un modelo general no lineal, del cual se puedan extraer deducciones prácticas para su uso en esquemas empíricos requiere de una escala de planteamientos a seguir: En primer lugar, se requiere que para el manejo de los sistemas no-lineales se establezcan los procesos de gestación del mismo, los cuales corresponden con la identificación y resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales a través de un método pertinente para ello, que den cuenta del fenómeno en particular. Esto implica una revisión de los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales[5]. Condición que permite el análisis del sistema ante el cual se esta, puesto que el sistema no lineal de

[5] Al respecto véanse: (Fernández, 1999), (Zill, 1988) y (Spiegel, 1983).

referencia pudiese ser un sistema caótico o simplemente dinámico pero no caótico.

En suma, el estudiar los fenómenos sociales con base en la distribución de sus atributos para individuos en general o referidos a un espacio o territorio en particular, provee la posibilidad de argumentar si estos tienden a estabilizarse o a hacerse caóticos. Lo cual, indicará si el sistema en un futuro se transforma mejorando, manteniendo constante o empeorando la situación de los residentes. Así mismo, se establece la posibilidad de generar un pronóstico probabilístico de la situación de los fenómenos.

Determinar el grado de caosticidad de un sistema permite conocer la plausibilidad de determinar si dentro de la heterogeneidad o de la homogeneidad de las condiciones de vida de los individuos existen ciertos patrones particulares, lo cual, implica una identificación de pautas socioeconómico-político-espaciales.

Para ello, se requiere apuntar sobre los distintos patrones de atracción o repulsión de los parámetros o variables a considerar para los fenómenos sociales. Que permitan visualizar las dimensiones de la incerteza o de certeza asintótica según sea el caso.

III.1 Atractores.

La formación de un atractor corresponde con el hecho de que los objetos identificados se agrupen en un espacio determinado con una presente dispersión. Así, dado V un subconjunto de R^n y $F: V \rightarrow R^n$, donde n=1, 2 ó 3. También dado A un subconjunto de V. Entonces A es un atractor de F sujeto a las siguientes condiciones:

1) A es un cerrado e invariante[6] subconjunto de V
2) Existe una vecindad U de A tal que cada vez que v esta en U entonces $F^{(k)}(v) \rightarrow A$ (en el sentido de que para cada $\epsilon > 0$, hay un entero positivo N tal que si $k \geq N$, allí existe un w_k en A tal que $\|F^{(k)}(v)-w_k\| < \epsilon$).Los atractores, como su nombre lo indica, son una representación de las condiciones tendenciales y de variación, sin salir de un rango de evolución y que se gesta como resultado del

[6] La invarianza significa que las iteraciones de cualquier punto en A están también en A.

patrón que tienen los parámetros de determinadas ecuaciones que les permiten su existencia.

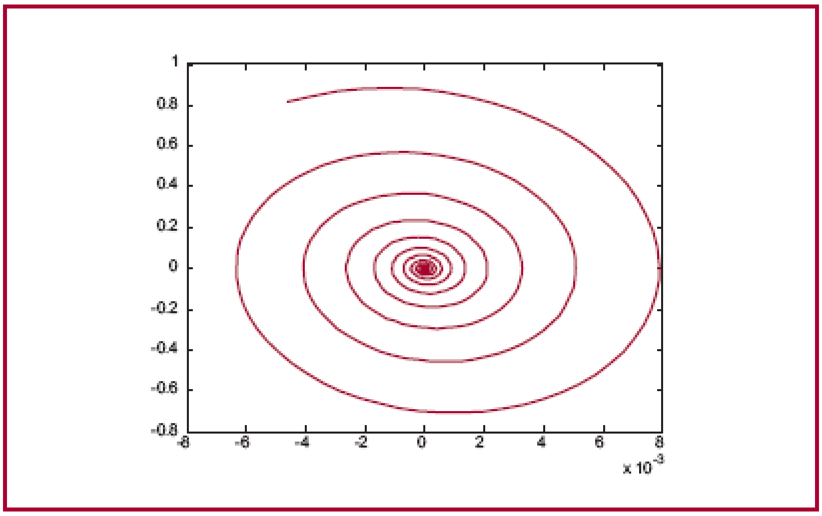
Estos pueden ser atractores no caóticos y atractores caóticos, estos últimos también son conocidos como atractores extraños. Dentro de los atractores no caóticos se encuentran aquellos cuya tendencia coincide con un punto fijo o una zona fija de atracción sin variación en su esquema tendencial o de evolución estadística. La cual, se determina con un alto grado de probabilidad, en grado tal que experimentan trayectorias deterministas, siendo sencillo el pronóstico de estás. Esto implica que este tipo de atractores, debido a su estructura, sea predecible su evolución con un alto grado de certeza que si bien pudiese no ser una certeza absoluta permite la identificación clara de las trayectorias de evolución, a estos también se les conoce como atractores simples.

En este sentido, los atractores simples (véanse esquema 1 y 2) son una forma particular de determinación de los comportamientos dinámicos de las estructuras espacio-temporales, que bajo ciertas características, como los atractores de punto fijo, pudiesen corresponder con factores relacionados con las condiciones de vida y crecimiento de las ciudades.

Este esquema de atractores simples puede ser aplicado a los fenómenos espaciales y no dista de que ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de los individuos o de fenómenos sociales colectivos, se registre un aumento o disminución desmesurada de individuos que eligen satisfacer una determinada necesidad o algún interés en particular.

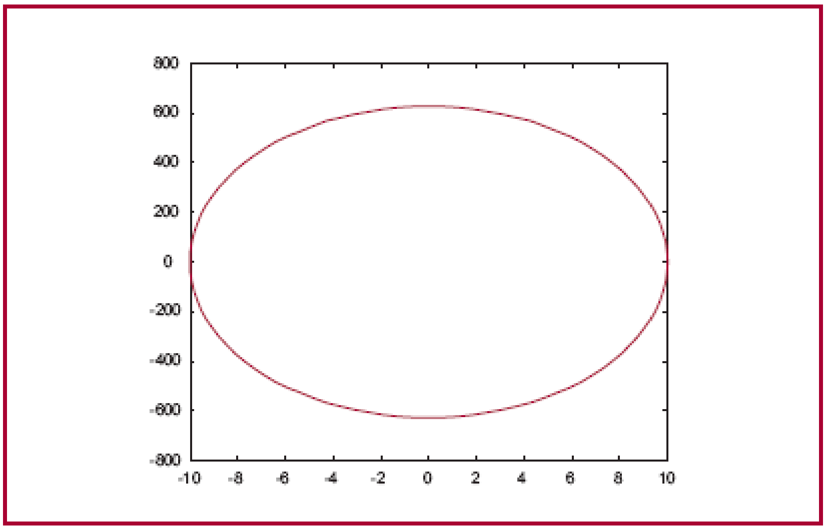
Así, queda establecido que el tipo de atractor simple puede dividirse en dos "1) *el punto atractor*, que corresponde a un estado estacionario del sistema, nada ocurre al transcurrir el tiempo; 2) el atractor *de ciclo límite*, que indica un comportamiento periódico, lo que implica, además, que, si bien el sistema es disipativo y, por lo tanto, va perdiendo su energía, ésta se va reponiendo por la entrega de energía de alguna fuente exterior." (Sametband, 1999: 60). Estas dos clases de atractor son de estructura simple y pueden ser representados a través de curvas cerradas como se muestra en los esquemas 1 y 2.

Esquema 1: Atractor de punto fijo



Fuente: (Romanelli, 2006: figura 1)

Esquema 2: Atractor de ciclo límite



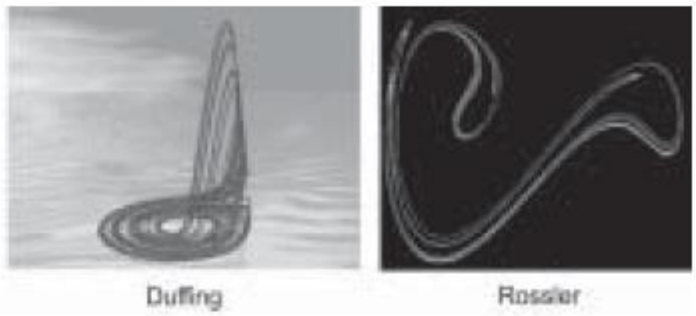
Fuente: (Romanelli, 2006: figura 2)

Lo anterior es interesante cada vez que pudiesen ser establecidas ecuaciones que representen estos sistemas con un grado de complejidad relativamente bajo. Sin embargo, la mayor parte de los fenómenos sociales vinculados al territorio o las incidencias del individuo en el espacio no corresponden con estás condiciones. Pues cabe destacar que si se pretende transitar de una situación caótica a una ordenada o con cierto tipo de orden, el camino es el establecimiento de una transformación de la situación original a una posterior contemplando la existencia de entropía, es decir, la transformación de un sistema a otro no es unívoca.

Una gran parte de los fenómenos sociales operan bajo patrones de mayor grado de complejidad, lo cual, implica que su dinámica requiere de sistemas que tiene que ver más con los atractores de tipo extraño (véanse esquemas 3 y 4)

Los atractores extraños o meramente caóticos, corresponden con los sistemas que tienden a ser altamente irregulares, cabe destacar que el nombre de “atractor extraño le fue dado por D. Ruelle y F. Tankes” (Cambel, 1999: 70), dentro de los atractores extraños o atractores caóticos representativos de este tipo de soluciones matemáticas se tiene el clásico atractor de Lorenz (véase esquema 4).

Esquema 3: Atractor extraño de los tipos Duffing y Rössler



Fuente: (Romanelli, 2006: figura 4)

Esquema 4: Atractor extraño del tipo Lorenz

Fuente: (Romanelli, 2006: figura 6)

Estos atractores por las condiciones de su estructura presentan una opción de mayor vialidad para la identificación de evolución de los fenómenos sociales espaciales, pues contemplan la no existencia de un periodo preciso de transcurso de las trayectorias. Con ello en mente, se presenta el nacimiento del caos a través de sus requerimientos para un sistema inestable.

IV. El nacimiento del Caos.

La idea sobre la existencia del caos data desde hace varios miles de años a.C. y bien puede situársele como significativo para la formación del universo en la época de los griegos, quienes sostenían que el caos correspondía con la ausencia de todo orden. En la teoría matemática del caos esto no opera del todo de esta manera, puesto que se considera un tipo de caos en donde si es posible la identificación de comportamientos regulares aunque no igualmente repetitivos de la información analizada. En muchos de los casos este caos se le conoce como determinista y hasta determinista asintótico, que no es del todo indeterminista ni del todo determinista, es decir, es posible establecer condiciones de mensurabilidad en los sistemas caóticos y nos guían en nuestro esquema de certeza asintótica o de más o menos verdadero. Para ello es necesario observar las circunstancias de la estabilidad o inestabilidad de estos sistemas.

IV.1 Estabilidad, inestabilidad y el exponente de Lyapunov.

IV.1.1 El teorema de estabilidad de Lyapunov.

Con la teoría de la estabilidad se busca identificar sistemas que en principio son estables pero que con el paso del tiempo se vuelven inestables o caóticos o sistemas que desde un inicio dan muestras de un comportamiento caótico. Esto permite el estudio e identificación de sistemas estables e inestables, así mismo, abre las puertas a la enunciación posterior del control de sistemas caóticos. En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad. Sin embargo, sólo atenderemos a los dilemas de estabilidad de los puntos de equilibrio.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov[7]. Donde, un punto de equilibrio se dice estable si todas

---

[7] Aleksandr Lyapunov (1857-1918), matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.

las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Así, un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito. Cabe destacar que los teoremas de estabilidad de Lyapunov ofrecen condiciones suficientes para la estabilidad de puntos de equilibrio (PE).

IV.1.2 Teorema de estabilidad de Lyapunov

Consideremos el sistema estacionario

$x' = f(x)$………… (1)

Donde $f: D \to R^n$ es un mapa local desde un dominio $D \subset R^n$ en R^n.

Supongamos que $x'' \in D$ es un PE de (1), es decir $f(x'') = 0$. Vamos a caracterizar y estudiar la estabilidad de x''. Por conveniencia, vamos a asumir que $x'' = 0$ (esto no nos hace perder generalidad porque, si no es así, definimos $y = x - x''$ y trabajamos con la ecuación $y' = g(y)$, donde $g(y) \triangleq f(y + x'')$, que tiene un equilibrio en el origen).

Definición 1. El PE $x = 0$ de (1) es estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $\|x(0)\| < \delta \to \|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$

a) inestable si no es estable.

b) asintóticamente estable (AE) si es estable y δ puede elegirse tal que:

$\|x(0)\| < \delta \to \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

Esta definición tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo $t \geq 0$. Esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada, puesto que se requieren condiciones adicionales en el teorema de Lyapunov que van a garantizar la existencia global (en el tiempo) de la solución.

Ahora, es posible determinar la estabilidad en el PE a través de funciones, para ello, se considera que $V: D \to R$ una función continuamente diferenciable en un dominio D $\subset R^n$ que contiene el origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (1) está dada por:

$$V^*(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},...,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x) \end{bmatrix}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Donde, la enunciación de V, permite establecer el primer teorema:

Teorema 1 (Lyapunov). Sea el origen x = 0 un PE de (1) y sea D $\subset R^n$ un dominio que contiene el origen. Sea V: D $\rightarrow$R una función continuamente diferenciable tal que

V(0) = 0 y V(x) > 0 en D - $\{0\}$ ………………. (3)

$\mathring{V}(x) \leq 0$ en D………………………………….. (4)

Entonces x=0 es estable. Más aún, si

$\mathring{V}(x) < 0$ en D - $\{0\}$……………………………… (5)

Entonces x=0 es AE

Demostración.

Dado $\epsilon > 0$, elijamos r $\in (0,\epsilon]$ tal que

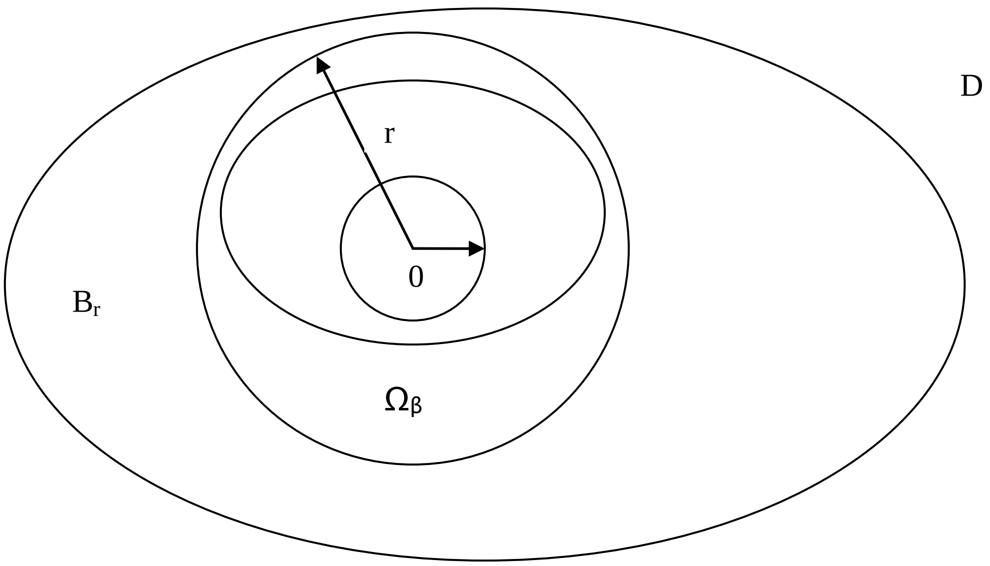
$B_r = \{x \in R^n : ||x|| \leq r\} \subset D$

Sea $\alpha = \text{mín}_{||x||=r} V(x)$. Entonces $\alpha > 0$ por (2). Tomemos $\beta \in (0, \alpha)$ y sea

$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$

Entonces Ω_β está en el interior de B_r (véase el esquema 5). El conjunto Ω_β tiene la propiedad

Esquema 5: representación de los conjuntos de la demostración.



Fuente: Elaboración propia con base en (Seron, 2000 citado en Caloca, 2010).

De que toda trayectoria que comienza en Ω_β en t=0 permanece en Ω_β para todo $t \geq 0$. Esto sigue de (4) ya que

$\mathring{V}(x(t)) \leq 0 \rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$, para todo $t \geq 0$

Como Ω_β es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque está contenido en B_r), se concluye que el (1) tiene una solución única definida para todo $t \geq 0$ cuando $x(0) \in \Omega_\beta$. Como V es continua y V(0)=0, existe $\delta > 0$ tal que

$||x|| \leq \delta \rightarrow V(x) < \beta$

Entonces

$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$

Y

$x(0) \in B_\delta \rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \rightarrow x(t) \in B_r$, para todo $t \geq 0$

Por lo tanto

$||x(0)|| < \delta \rightarrow ||x(t)|| < r \leq \epsilon$, para todo $t \geq 0$

Lo que muestra que el PE en x=0 es estable.

Supongamos ahora que (5) también vale. Para mostrar EA debemos probar que $x(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$. Como V es continua y $V(0)=0$, es suficiente mostrar que $V(x(t))\to 0$ cuando $t\to\infty$. Como V (x(t)) es monotónicamente decreciente y acotada inferiormente por cero,

$V(x(t)) \to c\geq 0$ cuando $t\to\infty$

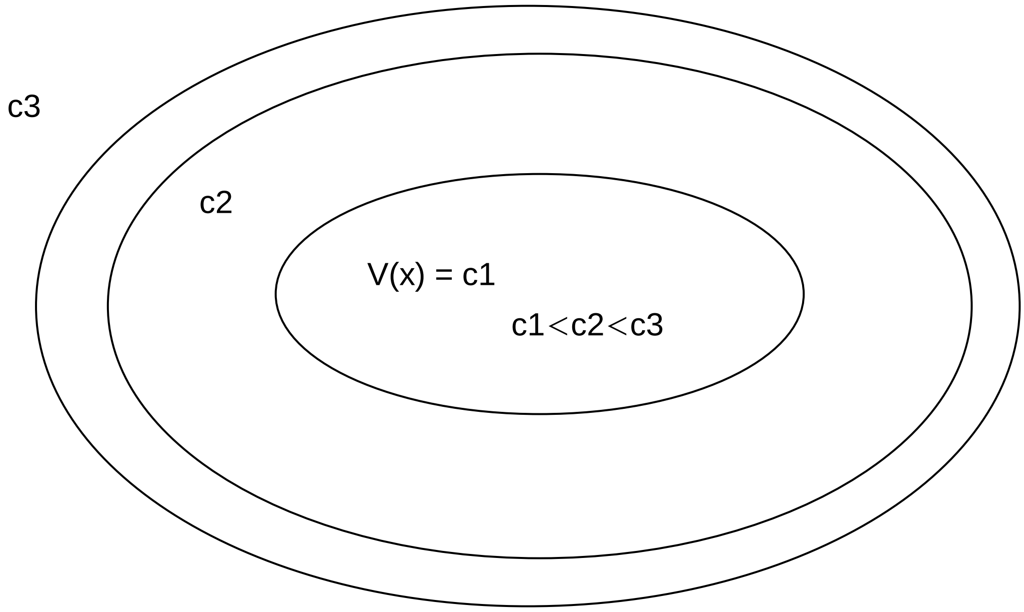
Mostramos que c=0 por contradicción. Supongamos que $c>0$. Por continuidad de V(x), existe $d>0$ tal que $B_d \subset \Omega_c$. El límite $V(x(t)) \to c >0$ implica que la trayectoria x(t) permanece fuera de la bola B_d para todo $t\geq 0$. Sea $-\Upsilon = \max_{d\leq||x||\leq r}\mathring{V}(x)$, el cual existe porque la función continua $\mathring{V}(x)$ alcanza un máximo sobre el conjunto compacto $\{d\leq||x||\leq r\}$. Sabemos que $-\gamma<0$ por (5). Integrando $\mathring{V}(x)$ tenemos que

$$V(x(t))= V(x(0))+ \int_0^t \mathring{V}(x(\tau))\, d\tau \leq V(x(0))- \gamma t$$

Como el lado derecho se va a hacer negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice la suposición de que $c>0$. qed

En este sentido, una función continuamente diferenciable que satisface (3) y (4) se denomina función de Lyapunov. La superficie $V(x)= c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel. Usando superficies de Lyapunov, (véase el esquema 6: que da una interpretación intuitiva del teorema 1). La condición $\mathring{V}\leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x)= c$ se introduce en el conjunto $\Omega c = \{x \in R^n |\ V(x)\leq c\}$ y nunca puede salir de él. Cuando $\mathring{V}<0$, la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un c menor. A medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t\to\infty$. Si sólo sabemos que $\mathring{V}\leq 0$, no podemos asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir:

Esquema 6: curvas de nivel de una función de Lyapunov



Fuente: Elaboración propia con base en (Seron, 2000)

Que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola B_ϵ sólo con requerir que el estado inicial x(0) pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

Una función V(x) que satisface (3) se dice definida positiva. Si satisface la condición más débil $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$, se dice semidefinida positiva. Una función se dice definida negativa o semidefinida negativa si –V(x) es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Si V(x) no tiene signo definido con respecto a alguno de estos cuatro casos se dice indefinida. El teorema de Lyapunov se puede enunciar, usando esta nueva terminología como: el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable tal que $\mathring{V}(x)$ es semidefinida negativa, y es AE si $\mathring{V}(x)$ es definida negativa.

IV.1.3 Cuestiones sobre la región de atracción: Estabilidad asintótica global (EAG).

Sea ϕ (t; x) la solución de (1) que comienza en t=0 y supongamos que el origen x=0 es un PE y AE. Definimos como región (dominio) de atracción (RA) del PE al conjunto de todos los puntos x tal que $\text{lím}_{t\to\infty} \phi(t; x)=0$. Es en general difícil o imposible encontrar analíticamente la RA. Sin embargo, se pueden usar funciones de Lyapunov para estimarla en conjuntos contenidos en la RA. Por la prueba del teorema 1 sabemos que existe una función de Lyapunov que satisface las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio D, y si $\Omega_c=\{x\in R^n | V(x)\leq c\}$ está acotado y contenido en D, entonces toda trayectoria que comienza en Ω_c permanece en Ω_c y tiende al origen cuando $t\to\infty$. Por lo tanto Ω_c es una estima de la RA. Esta estima puede ser conservadora, es decir, puede ser mucho más chica que la RA real.

Queremos saber bajo que condiciones la RA es todo el espacio R^n. Esto será así si podemos probar que para todo estado inicial x, la trayectoria $\phi(t; x)$ tiende al origen cuando $t\to\infty$, sin importar cuan grande es $||x||$. Si un PE AE tiene esta propiedad se dice que es globalmente AE (EAG). Recordando otra vez la prueba del teorema 1 vemos que se puede probar EAG si se puede asegurar que cada punto $x \in R^n$ puede incluirse en el interior de un conjunto acotado Ω_c. Esto no siempre va a ser posible porque para valores grandes de c el conjunto Ω_c puede no ser acotado.

Para ello, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2 (Barbashin-Krasovskii).

Sea x=0 un PE de (1). Sea V: $R^n \to R$ una función continuamente diferenciable tal que

$V(0)=0$ y $V(x)>0$ para todo $x\neq 0$……….……. 6

$||x|| \to\infty \to V(x)\to\infty$………………………….. 7

$\mathring{V}(x)<0$ para todo $x\neq 0$……………………….. 8

Entonces x=0 es GAE

Demostración.

Dado cualquier punto $p \in R^n$, sea c= V(p). La condición 7 implica que para cualquier c >0, existe $r>0$ tal que $V(x)>c$ cuando $||x||>r$. Por lo tanto $\Omega_c \subset B_r$, lo que implica que Ω_c es acotado. El resto de la prueba es similar al teorema 1. qed.

IV. 1. 5 Inestabilidad.

Vamos a ver un teorema que prueba que un PE es inestable. Sea V: $D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset R^n$ que contiene al origen x=0. Supongamos que V(0)= 0 y que hay un punto x_0 arbitrariamente cercano al origen tal que $V(x_0)>0$. Elijamos $r>0$ tal que la bola $B_r = \{x \in R^n | \; ||x|| \leq r\}$ esté contenida en D, y sea

$U=\{x \in B_r \mid V(x)>0\}$.................................. 9

El conjunto U es no vacío. Su frontera está dada por la superficie V(x)=0 y la esfera $||x|| = r$. Como V(0)= 0, el origen está sobre la frontera de U en el interior de B_r.

Teorema 3: (Chetaev).

Sea x=0 un PE de (1). Sea V: $D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que V(0)=0 y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 con $||x_0||$ arbitrariamente pequeña. Definamos el conjunto U como en (9) y supongamos que $\mathring{V}(x) > 0$ en U. Entonces x=0 es inestable

Demostración.

El punto x_0 está en el interior de U y $V(x_0) = a > 0$. La trayectoria x(t) que comienza en $x(0) = x_0$ debe dejar el conjunto U. Para probar esto, notemos que mientras x(t) permanezca en U, $V(x(t)) \geq a$ porque $\mathring{V}(x) > 0$ en U. Sea

$\gamma = \text{mín}\{\mathring{V}(x) \mid x \in U \text{ y } V(x) \geq a\}$

que existe porque la función continua $\mathring{V}(x)$ tiene un mínimo en el conjunto compacto $\{x \in U \text{ y } V(x) \geq a\} = \{x \in B_r \mid V(x) \geq a\}$. Entonces $\gamma > 0$ y

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \mathring{V}(x(s))ds \geq a + \gamma t$$

Esta desigualdad muestra que x(t) no se puede quedar indefinidamente en U porque V(x) está acotada en U. Ahora, x(t) no puede dejar U a través de la superficie V(x)=0 porque V(x(t)) $\geq$ a. Por lo tanto debe dejar U a través de la esfera $||x||$= r. Como esto pasa para $||x_0||$ arbitrariamente pequeña, el origen es inestable. qed

Por otra parte, es posible observar que las condiciones espaciales caóticas permiten configurar la existencia de atractores simples y/o extraños a lo largo del territorio, esto ocurre cada vez que exista una segregación socio espacial. Lo cual, puede ser constatado a través de la evaluación de la caosticidad del sistema en estudio.

Así, la evaluación del tipo de atractor para las condiciones de vida de la población que son estudiadas en un sistema social que tiene que ver con el territorio, puede establecerse a través de la determinación de si este es un sistema estable o inestable, es decir, si es no caótico o caótico respectivamente.

La indagación de esto corresponde con la evaluación de la función que determina tal sistema por medio del llamado exponente de Lyapunov. El cual opera bajo un esquema bivalente, de tal suerte que si el exponente resulta ser positivo; la situación que experimenta el sistema es caótica y por el contrario, si este es negativo; el sistema esta representado por un atractor simple: de ciclo límite o de punto fijo. La estimación del exponente de Lyapunov corresponde con:

$$\lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left| f'(x_i) \right|$$

Donde las múltiples iteraciones del sistema determinan si este tiene un comportamiento simple o extraño. Aquí tan sólo lo señalamos en otro trabajo se expondrá las implicaciones para un sistema territorial de corte socio-político-económico.

V. Conclusiones.

Las reflexiones finales corresponden con el hecho de que si bien en la búsqueda de una verdad, como correspondencia con los hechos, sólo es posible encontrar una categoría de más o menos verdadera, esto implica que la verdad con V para los fenómenos sociales sea únicamente una verdad con v. Debido al plausible tránsito de caos aparentemente indeterminado a un sistema de caos determinista o en su caso hasta un sistema del todo estable, es decir, bajo un marco no caótico, ello bajo un esquema diacrónico que implica la presencia de un cierto grado de entropía.

Estas condicionantes conducen a argumentar que el conocimiento de las cosas y la relación entre ellas con una certeza inamovible en los fenómenos sociales, es sólo el sueño de los deterministas mecanicistas. La vida de los individuos no necesariamente es automática, puesto que los seres humanos tienen intenciones no absolutas y deambulan bajo la pertinencia del libre albedrío.

El libre albedrío y la inestabilidad de los sistemas, implica el nacimiento de la creatividad de los seres humanos y la inconsistencia de la intencionalidad pura. Porque no todas las acciones que ejecutan los individuos están plagadas por una intencionalidad rampante, muchas de ellas sólo son procesos que se rigen por las incontrolables pasiones: la certeza asintótica y sus variables ocultas.

VI. Bibliografía.

Abbagnano, Nicola (1954). *Filosofía de lo posible*, México: FCE.

Arrowsmith, D. y C. Place (1992). *Dynamical Systems: differential equations, maps and chaotic behaviour*, Reino Unido: Chapman and Hall.

Badiou, Alain (1978). *El concepto de modelo*, México: Siglo XXI.

Beck, Ulrich (1998). *La sociedad del riesgo*, Paidós, Barcelona; España, pp. 304.

Briggs, John y Peat, David (1999). *Las siete leyes del caos*, Barcelona; España: Grijalbo.

------- (1994). *Espejo y reflejo: del caos al orden*, Barcelona; España: Gedisa.

Cambel, A. (2000). *Applied chaos theory*, USA: Academic Press.

Costa, Newton da (2000). *El conocimiento científico*, México: UNAM.

Davidson, Donald (2001). *De la verdad y de la interpretación*, Barcelona; España: Gedisa.

Ekeland, Ivar (2001). *El caos*, México: Siglo XXI.

Estany, Anna (2001). *La fascinación por el saber: introducción a la teoría del conocimiento*, Barcelona; España: Crítica.

Fernández, Andrés (1999). *Dinámica caótica en economía*, Madrid; España: Mc Graw Hill.

Feyerabend, Paul (1992). *Tratado contra el método*, México: REI

------- (1999). *Ambigüedad y armonía*, Barcelona; España: Paidós y UAB.

------- (2001). *¿Por qué no Platón?*, Madrid; España: Tecnos.

------- (1991). *Diálogos sobre el conocimiento*, Madrid; España: Catedra.

Guénard, François y Leliévre, Gilbert (Edits. 1999). *Pensar la matemática*, Barcelona; España: Tusquets.

Gulick, Denny (2000). *Encounters with chaos*, Reino Unido: IoP.

Gödel, Kurt (1992). *On formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems*, New York; USA: Dover.

Heisenberg W. (1971) *Physics and Beyond; Encounters and Conversations*, Nueva York; USA: Harper and Row.

Hume, David (1993). *Tratado Sobre la Naturaleza Humana*, México: El Ateneo.

------- (1980). *Del conocimiento*, Buenos Aires; Argentina: Aguilar.

Kant, Emmanuel (2006). *Crítica del juicio*, México: Editores Mexicanos Unidos.

------- (1994). *Crítica de la razón práctica*, México: ESPASA-CALPE.

------- (2008). *De la forma y de los principios del mundo sensible y del mundo inteligible*, Madrid; España: Libera.

Kapitaniak, T. (2000). *Chaos for engineers*, Berlin; Germany: Springer Verlag.

Kowalski, H. (1965). *Topological spaces*, New York; USA: Academic Press.

Leibniz, Godofredo (2003). *Nuevo tratado sobre el entendimiento humano*, México: Porrúa.

Mendelson, Bert (1990). *Introduction to topology*, New York; USA: Dover.

Miller, David (comp. 1997). *Popper escritos selectos*, México: FCE.

Mosterín, Jesús (1978). *Racionalidad y acción humana*, Madrid; España: Alianza.

Nagashima, H y Baba Y. (1999). *Introduction to chaos*, Bristol; Reino Unido: IoP.

Popper, Karl (1994). *Conjeturas y refutaciones*, Barcelona; España: Paidós.

Prigogine, Ilya (1999). *Las leyes del caos*, Barcelona; España: Crítica.

------- y Stengers, Isabelle (1992). *Entre el tiempo y la eternidad*, Buenos Aires; Argentina: Alianza.

Quine, W. (1998). *Filosofía de la lógica*, Madrid; España: Alianza.

Romanelli, Lilia (2006). "Teoría del caos en los sistemas biológicos", en: *Revista Argentina de Cardiología*, Argentina, número 6 volumen 74, pp. 478-482.

Sametband, Moisés (1999). *Entre el orden y el caos la complejidad*, México: FCE.

Seron, María Marta (2000). *Sistemas no lineales*: *notas de clase*, Rosario: Universidad del Rosario, Mimeo.

Sibirsky, K. (1975). *Introduction to topological dynamics*, Leyden; Holland: Noordhoff.

Spiegel, Murray (1983). *Ecuaciones diferenciales*, México: Prentice Hall.

Puu, Tönu (2000). *Atractors, bifurcations and chaos*, Berlin; Germany: Springer Verlag.

Vilar, Sergio (1997). *La nueva racionalidad*, Barcelona; España: Kairós.

Wark, Kenneth (1985). *Termodinámica*, México: Mc Graw Hill.

Wittgenstein, Ludwig (2000). *Sobre la certeza*, Barcelona; España: Gedisa.

------- (1991). *Tractatus Logico-Philosophicus*, Madrid; España: Alianza.

Zill, Dennis (2007). *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado*, México: Thomson.