Ejercitate
en
Probabilidad II

Lucía A. Ruiz Galindo

2009

Ejercicio 1. Determine el valor de la constante de manera que cada una de las funciones sea de densidad.

i. $h(x) = kx^2, \qquad x = 1, 2$

ii. $p(x) = ax, \qquad x = 1, 2, 3$

iii. $g(x) = x, \qquad x \in [-a, a]$

Solución.
i. La función $h(x) = kx^2 \geq 0$ si y sólo si $k \geq 0$, ya que $x^2 > 0$, $\forall x \in R_X$ y como X es una v.a.d.

$$\begin{aligned}\sum_{R_X} h(x) &= 1 \\ &= \sum_{x=1}^{2} kx^2 \\ &= k(1)^2 + k(2)^2 \\ &= k + 4k \\ &= 5k = 1,\end{aligned}$$

por lo tanto, $k = \frac{1}{5}$.

$$h(x) = \frac{1}{5}x^2, \qquad x = 1, 2 \qquad \text{sí es de densidad.}$$

ii. Puesto que $x > 0$ en R_X, $p(x)$ es no negativa, es decir, $p(x) = ax \geq 0$ si y sólo si $a > 0$ y

$$\begin{aligned}\sum_{R_X} p(x) &= \sum_{x=1}^{3} ax \\ &= a(1) + a(2) + a(3) \\ &= a + 2a + 3a \\ &= 6a = 1,\end{aligned}$$

lo cual implica que $a = \frac{1}{6}$, por ende

$$p(x) = \frac{1}{6}x, \qquad x = 1, 2, 3 \qquad \text{sí es de densidad.}$$

iii. La función $g(x) = x$ con $x \in [-a, a]$ no es de densidad ya que $g(x) < 0$ para toda $x \in [-a, 0)$ y por tanto no sesatisface la no negatividad, $g(x) \geq 0$. En consecuencia, se puede afirmar que $g(x)$ no es de densidad, ya que por definición se tienen que cumplir con

2 criterios. Por curiosidad se analiza si

$$\begin{aligned}\int_{R_X} g(x)dx &= 1,\\ &= \int_{-a}^{a} xdx\\ &= \frac{1}{2}x^2\Big|_{-a}^{a}\\ &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

puesto que $0 = 1$ es una contradicción, no existe un número a tal que $g(x)$ sea de densidad, tal y como se había concluido al analizar la no negatividad de $g(x)$.

Ejercicio 2. Sea

i. $g(y) = \dfrac{6+3y}{a}, \qquad y = 1, 2$

ii. $h(z) = \dfrac{1}{c^2} z e^{-z/c}, \ z \geq 0$

a) ¿Qué valor deben tomar las constantes para que las funciones sean de densidad?
b) Calcule la media y la varianza de Y y Z.

Solución.
i.a) Dado que $y > 0$ en su recorrido $R_Y = \{1, 2\}$, la función cumple con $g(y) \geq 0$ si y sólo si $a > 0$ y por la segunda propiedad se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{R_Y} g(y) &= \sum_{y=1}^{2} \frac{6+3y}{a}\\ &= \frac{6+3(1)}{a} + \frac{6+3(2)}{a}\\ &= \frac{6+3}{a} + \frac{6+6}{a}\\ &= \frac{9}{a} + \frac{12}{a}\\ &= \frac{21}{a}\end{aligned}$$

de donde $a = 21$, puesto que $\frac{21}{a}$ debe ser igual a 1. Entonces,

$$g(y) = \frac{6+3y}{21}, \qquad y = 1, 2 \qquad \text{es de densidad.}$$

i.b) La media de Y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= \sum_{y=1}^{2} y \ \frac{6+3y}{21} \\ &= 1\left(\frac{6+3(1)}{21}\right) + 2\left(\frac{6+3(2)}{21}\right) \\ &= 1\left(\frac{9}{21}\right) + 2\left(\frac{12}{21}\right) \\ &= \frac{33}{21}. \end{aligned}$$

Dado que

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y),$$

primero se debe de obtener

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{R_Y} y^2 f_Y(y) \\ &= \sum_{y=1}^{2} y^2 \ \frac{6+3y}{21} \\ &= 1^2\left(\frac{6+3(1)}{21}\right) + 2^2\left(\frac{6+3(2)}{21}\right) \\ &= 1\left(\frac{9}{21}\right) + 4\left(\frac{12}{21}\right) \\ &= \frac{57}{21}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \frac{57}{21} - \left(\frac{33}{21}\right)^2 \\ &= 0.2449. \end{aligned}$$

ii.a) La propiedad de que $h(z) \geq 0$ se cumple ya que la constante está elevada al cuadrado, $z \geq 0$ y $e^{-z/5} > 0$. Ahora se analiza la segunda propiedad, $\int_{R_Z} h(z)dz = 1$.

$$\int_{R_Z} \frac{1}{c^2} z e^{-z/c} dz = \frac{1}{c^2} \int_0^\infty z e^{-z/c} dz$$

integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = z & dv = e^{-z/c} \\ du = dz & v = -ce^{-z/c}, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\int_0^\infty ze^{-z/c}dz &= \frac{1}{c^2}\left[-cze^{-z/c}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty ce^{-z/c}dz\right] \\
&= \frac{1}{c}\left[-\lim_{z\to\infty} ze^{-z/c} + 0 - ce^{-z/c}\Big|_0^\infty \right] \\
&= -\lim_{z\to\infty} e^{-z/c} - (-e^0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dado que la segunda propiedad se satisface, se concluye que cualquier valor de c hace que $h(z)$ sea de densidad.

ii.b) La media de Z es

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{R_Z} zh(z)dz \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{c^2}z^2e^{-z/c}dz
\end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = z^2 & dv = e^{-z/c} \\ du = 2z & v = -ce^{-z/c}, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{c^2}z^2e^{-z/c}dz &= -\frac{1}{c^2}cz^2e^{-z/c}\Big|_0^\infty + 2c\int_0^\infty \frac{1}{c^2}ze^{-z/c}dz \\
&= -\frac{1}{c}\lim_{z\to\infty} z^2e^{-z/c} + 0 + 2c\int_0^\infty h(z)dz \\
&= 2c,
\end{aligned}$$

ya que la última integral es 1 puesto que h es función de densidad.

El cálculo de la varianza requiere determinar la $E(Z^2)$ tal y como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
E(Z^2) &= \int_{R_Z} z^2h(z)dz \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{c^2}z^3e^{-z/c}dz
\end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = z^3 & dv = e^{-z/c} \\ du = 3z^2 & v = -ce^{-z/c}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{c^2} z^3 e^{-z/c} dz &= -\frac{1}{c^2} cz^3 e^{-z/c}\Big|_0^\infty + 3c \int_0^\infty \frac{1}{c^2} z^2 e^{-z/c} dz \\ &= -\frac{1}{c} \lim_{z\to\infty} z^3 e^{-z/c} + 0 + 3cE(Z) \\ &= 3c(2c) \\ &= 6c^2. \end{aligned}$$

Por lo anterior, la varianza está dada por

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E^2(Z) \\ &= 6c^2 - 4c^2 \\ &= 2c^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. La función $g(y) = ke^{-y/5}$ con $y > 0$, ¿es de densidad?
Si su respuesta es afirmativa determine la función de distribución y calcule la varianza, sesgo y curtosis de Y.

Solución.
Ya que $e^{-y/5} > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) \geq 0$ si y sólo si $k \geq 0$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_{R_Y} g(y)\mathrm{d}y &= \int_0^\infty ke^{-y/5}\mathrm{d}y \\ &= -5ke^{-y/5}\Big|_0^\infty \\ &= -\left(\lim_{y\to\infty} 5ke^{-y/5} - 5ke^0\right) \\ &= 5k \\ &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

de donde se obtiene que $k = \frac{1}{5}$ puesto que $5k$ debe ser igual a uno, por consiguiente

$$g(y) = \frac{1}{5}e^{-y/5},\ y > 0,$$

sí es una función de densidad.

A continuación se calcula la función de distribución. Cuando $-\infty \leq y \leq 0$,

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{y} g(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{y} 0\mathrm{d}u \\ &= 0 \end{aligned}$$

y cuando $0 \leq y \leq \infty$,

$$\begin{aligned}
G(y) &= \int_{-\infty}^{y} g(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{0} g(u)\mathrm{d}u + \int_{0}^{y} g(u)\mathrm{d}u \\
&= G(0) + \int_{0}^{y} \frac{1}{5}e^{-u/5}\mathrm{d}u \\
&= 0 - e^{-u/5}\Big|_{0}^{y} \\
&= 1 - e^{-y/5}.
\end{aligned}$$

De esta forma, la distribución de Y es

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq 0 \\ \\ 1 - e^{-y/5}, & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Ahora se prosigue a determinar la varianza.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{R_Y} y g(y) dy \\
&= \int_{0}^{\infty} y \frac{1}{5} e^{-y/5} dy
\end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = y & dv = e^{-y/5} \\ du = dy & v = -5e^{-y/5} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} y \frac{1}{5} e^{-y/5} dy &= -\frac{1}{5} 5 y e^{-y/5}\Big|_{0}^{\infty} + 5 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-y/5} dy \\
&= -\lim_{y \to \infty} y e^{-y/5} + 0 + 5 \int_{0}^{\infty} g(y) dy \\
&= 5 \qquad (2)
\end{aligned}$$

ya que la última integral es 1 debido a que $g(y)$ es de densidad.

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int\limits_{R_Y} y^2 g(y)dy \\ &= \int\limits_0^\infty y^2 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy \end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = y^2 & dv = e^{-y/5} \\ du = 2y & v = -5e^{-y/5} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty y^2 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy &= -\frac{1}{5} 5y^2 e^{-y/5} \Big|_0^\infty + 10 \int\limits_0^\infty \frac{1}{5} y e^{-y/5} dy \\ &= -\lim_{y\to\infty} y^2 e^{-y/5} + 0 + 10E(Y) \\ &= 10(5) \\ &= 50. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= 50 - 25 \\ &= 25, \end{aligned}$$

si se utiliza la definición de varianza se tiene que

$$\begin{aligned} V(Y) &= E[(Y - E(Y))^2] \\ &= \int\limits_{R_Y} (y - E(Y))^2 g(y)dy \\ &= \int\limits_0^\infty (y-5)^2 g(y)dy \\ &= \int\limits_0^\infty (y^2 - 10y + 25) g(y)dy \\ &= \int\limits_0^\infty y^2 g(y)dy - 10 \int\limits_0^\infty y g(y)dy + 25 \int\limits_0^\infty g(y)dy \\ &= E(Y^2) - 10E(Y) + 25 \\ &= 50 - 50 + 25 \\ &= 25. \end{aligned}$$

A continuación se calcula el sesgo.

$$
\begin{aligned}
S(X) &= E[(Y - E(Y))^3] \\
&= \int_{R_Y} (y - E(Y))^3 g(y)dy \\
&= \int_0^{\infty} (y-5)^3 g(y)dy \\
&= \int_0^{\infty} (y^3 - 15y^2 + 75y - 125) g(y)dy \\
&= \int_0^{\infty} y^3 g(y)dy - 15\int_0^{\infty} y^2 g(y)dy \\
&\quad +75\int_0^{\infty} yg(y)dy - 125\int_0^{\infty} g(y)dy \\
&= E(Y^3) - 15E(Y^2) + 75E(Y) - 125\int_0^{\infty} g(y)dy,
\end{aligned}
$$

pero como

$$
\begin{aligned}
E(Y^3) &= \int_{R_Y} y^3 g(y)dy \\
&= \int_0^{\infty} y^3 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy
\end{aligned}
$$

integrando por partes:

$$
\begin{array}{ll}
u = y^3 & dv = e^{-y/5} \\
du = 3y^2 & v = -5e^{-y/5},
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} y^3 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy &= -\frac{1}{5} 5y^3 e^{-y/5}\Big|_0^{\infty} + 15\int_0^{\infty} \frac{1}{5} y^2 e^{-y/5} dy \\
&= -\lim_{y\to\infty} y^3 e^{-y/5} + 0 + 15E(Y^2) \\
&= 15(50) \\
&= 750,
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned} S(X) &= E(Y^3) - 15E(Y^2) + 75E(Y) - 125\int_0^\infty g(y)dy \\ &= 750 - 750 + 375 - 125 \\ &= 250. \end{aligned}$$

Otra forma de calcular el sesgo es

$$\begin{aligned} S(X) &= E[(Y - E(Y))^3] \\ &= \int_{R_Y} (y - E(Y))^3 g(y)dy \\ &= \int_{R_Y} (y-5)^3 g(y)dy \\ &= \int_0^\infty (y^3 - 15y^2 + 75y - 125)g(y)dy \\ &= \int_0^\infty y^3 \frac{1}{5}e^{-y/5}dy + 15\int_0^\infty y^2\frac{1}{5}e^{-y/5}dy \\ &\quad +75\int_0^\infty y\frac{1}{5}e^{-y/5}dy - 125\int_0^\infty \frac{1}{5}e^{-y/5}dy, \end{aligned}$$

la segunda, tercera y cuarta integral se encuentran en (3), (2) y (1) respectivamente, la primera se calcula a continuación integrando por partes.

$$\begin{array}{ll} u = y^3 & dv = e^{-y/5} \\ du = 3y^2 & v = -5e^{-y/5} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^3\frac{1}{5}e^{-y/5} &= -\frac{1}{5}5y^3e^{-y/5}\Big|_0^\infty + 15\int_0^\infty \frac{1}{5}y^2e^{-y/5}dy \\ &= -\lim_{y\to\infty} y^3e^{-y/5} + 0 + 15 \\ &= 15(50) \\ &= 750, \end{aligned} \tag{4}$$

sustituyendo,

$$\begin{aligned} S(X) &= \int_0^\infty y^3 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy + 15 \int_0^\infty y^2 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy \\ &\quad +75 \int_0^\infty y \frac{1}{5} e^{-y/5} dy - 125 \int_0^\infty \frac{1}{5} e^{-y/5} dy \\ &= 750 - 15(50) + 75(5) - 125 \\ &= 250. \end{aligned}$$

Ahora se procede a calcular la curtosis.

$$\begin{aligned} C(X) &= E[(Y - E(Y))^4] \\ &= \int_{R_Y} (y - E(Y))^4 g(y) dy \\ &= \int_0^\infty (y-5)^4 g(y) dy \\ &= \int_0^\infty (y^4 - 20y^3 + 150y^2 - 500y + 625) g(y) dy \\ &= \int_0^\infty y^4 g(y) dy - 20 \int_0^\infty y^3 g(y) dy + 150 \int_0^\infty y^2 g(y) dy \\ &\quad -500 \int_0^\infty y g(y) dy + 625 \int_0^\infty g(y) dy \\ &= E(Y^4) - 20E(Y^3) + 150E(Y^2) - 500E(Y) + 625 \int_0^\infty g(y) dy, \end{aligned}$$

pero ya que

$$\begin{aligned} E(Y^4) &= \int_{R_Y} y^4 g(y) dy \\ &= \int_0^\infty y^4 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy \end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = y^4 & dv = e^{-y/5} \\ du = 4y^3 & v = -5e^{-y/5}, \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y^4 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy &= -\frac{1}{5} 5y^4 e^{-y/5}\Big|_0^\infty + 20\int_0^\infty \frac{1}{5} y^3 e^{-y/5} dy \\ &= -\lim_{y\to\infty} y^4 e^{-y/5} + 0 + 20E(Y^3) \\ &= 15000,\end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}C(X) &= E(Y^4) - 20E(Y^3) + 150E(Y^2) \\ &\quad -500E(Y) + 625\int_0^\infty g(y)dy \\ &= 15000 - 15000 + 7500 - 2500 + 625 \\ &= 5625.\end{aligned}$$

La curtosis también se puede determinar de la siguente forma:

$$\begin{aligned}C(X) &= E[(Y - E(Y))^4] \\ &= \int_{R_Y} (y - E(Y))^4 g(y)dy \\ &= \int_0^\infty (y-5)^4 g(y)dy \\ &= \int_0^\infty (y^4 - 20y^3 + 150y^2 - 500y + 625) g(y)dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{5} y^4 e^{-y/5} dy - 20\int_0^\infty y^3 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy + 150\int_0^\infty y^2 \frac{1}{5} e^{-y/5} dy \\ &\quad -500\int_0^\infty y\frac{1}{5} e^{-y/5} dy + 625\int_0^\infty \frac{1}{5} e^{-y/5}\end{aligned}$$

la segunda, tercera, cuarta y quinta integral se encuentran en (4), (3), (2) y (1) respectivamente, la primera se calcula a continuación integrando por partes.

$$\begin{array}{ll} u = y^4 & dv = e^{-y/5} \\ du = 4y^3 & v = -5e^{-y/5} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y^4 \frac{1}{5} e^{-y/5} &= -\frac{1}{5} 5y^4 e^{-y/5}\Big|_0^\infty + 20\int_0^\infty \frac{1}{5} y^3 e^{-y/5} dy \\ &= -\lim_{y\to\infty} y^4 e^{-y/5} + 0 + 20E(Y^3) \\ &= 15000,\end{aligned}$$

sustituyendo se tiene que

$$\begin{aligned} C(X) &= \int_0^\infty \frac{1}{5}y^4 e^{-y/5}dy - 20\int_0^\infty y^3\frac{1}{5}e^{-y/5}dy + 150\int_0^\infty y^2\frac{1}{5}e^{-y/5}dy \\ &\quad -500\int_0^\infty y\frac{1}{5}e^{-y/5}dy + 625\int_0^\infty \frac{1}{5}e^{-y/5} \\ &= 15000 - 20(750) + 150(50) - 500(5) + 625 \\ &= 5625. \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Considérese las siguientes funciones

i. $f(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } w = 0 \\ \frac{a}{6}, & \text{si } w = 7 \\ \frac{a}{3}, & \text{si } w = 10 \end{cases}$

ii. $g(w) = a(10 - 3w), \qquad R_W = \{0, 1\}$

a) Determine el valor de a que haga que $f(w)$ y $g(w)$ sean de densidad.
b) Determine las funciones de distribución.
c) Calcule los primeros cuatro momentos de W.

Solución.
i.a) Para hallar el valor de a, se recurre a la segunda propiedad de la función de densidad.

$$\begin{aligned} \sum_{R_W} f(w) &= \frac{1}{2} + \frac{a}{6} + \frac{a}{3} \\ &= \frac{3+3a}{6}, \end{aligned}$$

Dado que $\frac{3+3a}{6}$ debe ser igual a 1, se obtiene que $a = 1$ y por tanto,

$$f(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } \ w = 0 \\ \frac{1}{6}, & \text{si } \ w = 7 \\ \frac{1}{3}, & \text{si } \ w = 10, \end{cases}$$

en donde es claro que también se cumple la primera propiedad de la función de densidad, ya que $f(w) \geq 0$.

i.b) A partir de la definición de la función de distribución se tiene que

si $w < 0$,

$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w} f(u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dado que $f(w) = 0, \ \forall w < 0$.

Si $0 \leq w < 7$,

$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<0} f(u) + \sum_{u=0}^{w} f(u) \\ &= 0 + f(0) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $7 \leq w < 10$,

$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<7} f(u) + \sum_{u=7}^{w} f(u) \\ &= F(0) + f(7) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

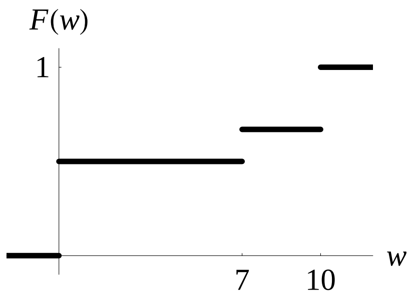
Si $10 \leq w < \infty$,

$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<10} f(u) + \sum_{u=10}^{w} f(u) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F(7) + f(10) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

De manera que

$$
F(w) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad w < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad 0 \le w < 7 \\ \frac{2}{3}, & \text{si} \quad 7 \le w < 10 \\ 1, & \text{si} \quad w \ge 10. \end{cases}
$$



i.c) Los momentos de W son

$$
\begin{aligned}
E(W) &= \sum_{R_W} w f(w) \\
&= 0\left(\frac{1}{2}\right) + 7\left(\frac{1}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
V(W) = \sum_{R_W} [w - E(W)]^2 f(w)
$$

$$\begin{aligned}
&= \left(0-\frac{9}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(7-\frac{9}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(10-\frac{9}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{81}{4}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{25}{4}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{121}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{85}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(W) &= \sum_{R_W}[w-E(W)]^3 f(w)\\
&= \left(0-\frac{9}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)+\left(7-\frac{9}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)+\left(10-\frac{9}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{729}{8}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{125}{8}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{1331}{8}\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{829}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(W) &= \sum_{R_W}[w-E(W)]^4 f(w)\\
&= \left(0-\frac{9}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+\left(7-\frac{9}{2}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)+\left(10-\frac{9}{2}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{6561}{16}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{625}{16}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{14641}{16}\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{8265}{16}.
\end{aligned}$$

ii.a) La función $g(w) = a(10-3w)$ es mayor o igual a cero si y sólo si $a \geq 0$, ya que $(10-3w) > 0 \ \forall x \in R_W = \{0,1\}$ y por la segunda propiedad se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{R_W} g(w) &= \sum_{x=0}^{1} a(10-3w)\\
&= a[10-3(0)] + a[10-3(1)]\\
&= 10a + 7a\\
&= 17a.
\end{aligned}$$

Dado que $17a$ debe ser igual a 1, se tiene que $a = \frac{1}{17} > 0$. Por lo tanto,

$$g(w) = \frac{1}{17}(10-3w), \qquad x = 0, 1 \qquad \text{es de densidad.}$$

ii.b) Por la definición de la función de distribución

si $w < 0$,

$$\begin{aligned} G(w) &= \sum_{u \leq w} g(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w} g(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $0 \leq w < 1$,

$$\begin{aligned} G(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<0} f(u) + \sum_{u=0}^{w} f(u) \\ &= 0 + f(0) \\ &= 0 + \frac{1}{17}[10 - 3(0)] \\ &= \frac{10}{17}. \end{aligned}$$

Si $1 \leq w < \infty$,

$$\begin{aligned} G(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<1} f(u) + \sum_{u=1}^{w} f(u) \\ &= F(0) + f(1) \\ &= \frac{10}{17} + \frac{1}{17}[10 - 3(1)] \\ &= \frac{10}{17} + \frac{7}{17} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que

$$F(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ w < 0 \\ \\ \dfrac{10}{17}, & \text{si } \ 0 \leq w < 1 \\ \\ 1, & \text{si } \ w \geq 1. \end{cases}$$

ii.c) Ya que $g(0) = \dfrac{10}{17}$ y $g(1) = \dfrac{7}{17}$, los momentos de W son

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{R_W} wg(w) \\ &= 0\left(\frac{10}{17}\right) + 1\left(\frac{7}{17}\right) \\ &= \frac{7}{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(W) &= \sum_{R_W} [w - E(W)]^2 g(w) \\ &= \left(0 - \frac{7}{17}\right)^2 \left(\frac{10}{17}\right) + \left(1 - \frac{7}{17}\right)^2 \left(\frac{7}{17}\right) \\ &= \frac{49}{289}\left(\frac{10}{17}\right) + \frac{100}{289}\left(\frac{7}{17}\right) \\ &= \frac{490}{4913} + \frac{700}{4913} \\ &= \frac{1190}{4913} \\ &= 0.2422. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(W) &= \sum_{R_W} [w - E(W)]^3 g(w) \\ &= \left(0 - \frac{7}{17}\right)^3 \left(\frac{10}{17}\right) + \left(1 - \frac{7}{17}\right)^3 \left(\frac{7}{17}\right) \\ &= -\frac{343}{4913}\left(\frac{10}{17}\right) + \frac{1000}{4913}\left(\frac{7}{17}\right) \\ &= -\frac{3430}{83521} + \frac{7000}{83521} \\ &= \frac{3570}{83521} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0.0427. \\
C(W) &= \sum_{R_W}[w - E(W)]^4 g(w) \\
&= \left(0 - \frac{7}{17}\right)^4 \left(\frac{10}{17}\right) + \left(1 - \frac{7}{17}\right)^4 \left(\frac{7}{17}\right) \\
&= \frac{2401}{83521}\left(\frac{10}{17}\right) + \frac{10000}{83521}\left(\frac{7}{17}\right) \\
&= \frac{24010}{1419857} + \frac{70000}{1419857} \\
&= \frac{94010}{1419857} \\
&= 0.0662.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5. Considerense las funciones

i. $f(y) = c(4y - 2y^2), \quad 0 \leq y \leq 2.$

ii. $g(y) = c(4y^2 - y), \quad y = 0, 1, 2.$

a) ¿Son de densidad? En caso afirmativo continua con los siguientes incisos.
b) Determine la función de distribución.
c) Cuál es la esperanza y varianza de Y.
d) Calcule la moda y la mediana de Y.

Solución.
i.a) Para que se satisfaga la primera propiedad $f(y) \geq 0$, se necesita que

1) $c \geq 0$ y $(4y - 2y^2) \geq 0$ o bien,

2) $c \leq 0$ y $(4y - 2y^2) \leq 0$.

Caso 1) $c \geq 0$ y el valor de y debe ser tal que

$$
\begin{aligned}
(4y - 2y^2) &\geq 0 \\
2y(2 - y) &\geq 0 \\
y(2 - y) &\geq 0
\end{aligned}
$$

de donde se desprende $y \geq 0$ y $y \leq 2$. En consecuencia, $f(y) \geq 0$ si y sólo si $c \geq 0$ y $y \in [0, 2]$.

Caso 2) $c \leq 0$ y el valor de y debe ser tal que

$$
\begin{aligned}
(4y - 2y^2) &\leq 0 \\
2y(2 - y) &\leq 0 \\
y(2 - y) &\leq 0
\end{aligned}
$$

lo que implica que i) $y \leq 0$ y $2 \geq y$ o ii) $y \geq 0$ y $2 \leq y$. Por tanto, $f(y) \geq 0$ si y sólo si $c \leq 0$ y $y \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, lo cual en el contexto del problema no es válido, puesto que el recorrido de y es el $[0, 2]$. Por tanto, $f(x) \geq 0$ si $c \geq 0$.

A continuación se calcula el valor de c tal que cumpla con la segunda propiedad para ser función de densidad.

$$\int_0^2 c(4y - 2y^2)dy = 1.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 c(4y - 2y^2)dy &= c\left(\int_0^2 4ydy - \int_0^2 2y^2dy\right) \\
&= c\left(2y^2 - \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^2 \\
&= c\left[(2(2)^2 - 2(0)^2) - \left(\frac{2}{3}(2)^3 - \frac{2}{3}(0)^3\right)\right] \\
&= c\left(8 - \frac{16}{3}\right) \\
&= c\left(\frac{8}{3}\right),
\end{aligned}$$

de manera que $c = \frac{3}{8}$, puesto que $c\left(\frac{8}{3}\right) = 1$. Por tanto, la función

$$\begin{aligned}
f(y) &= \frac{3}{8}(4y - 2y^2) \\
&= \frac{6}{8}(2y - y^2) \\
&= \frac{3}{4}(2y - y^2),\ 0 \leq y \leq 2.
\end{aligned}$$

es de densidad.

i.b) Observe que para cualquier $y \leq 0$, $f(y) = 0$ y por tanto $F(y) = 0$.

Ahora, si $y \in [0, 2]$,

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_{-\infty}^0 0du + \int_0^y \frac{3}{4}(2u - u^2)du \\
&= \frac{3}{4}\left(u^2 - \frac{1}{3}u^3\right)\Bigg|_0^y \\
&= \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{1}{3}y^3\right).
\end{aligned}$$

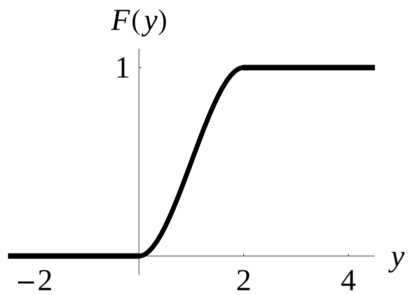
Si $y \in [2, \infty)$,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{2} f(u)du + \int_{2}^{y} f(u)du \\ &= F(2) + \int_{2}^{y} 0du \\ &= \frac{3}{4}\left(2^2 - \frac{1}{3}2^3\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(4 - \frac{8}{3}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{1}{3}y^3\right), & \text{si } y \in [0, 2] \\ 1, & \text{si } y \geq 2. \end{cases}$$

Su gráfica es:



i.c) La esperanza y la varianza de Y son

$$E(Y) = \int_{R_Y} y f(y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 y\frac{3}{4}(2y-y^2)dy \\
&= \frac{3}{4}\int_0^2 (2y^2-y^3)dy \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^2 \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}8-\frac{1}{4}16\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}-4\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

La varianza de una variable aleatoria continua Y está dada por:

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

y para este caso se tiene:

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{R_Y} y^2 f(y)dy \\
&= \int_0^2 y^2\ \frac{3}{4}(2y-y^2)dy \\
&= \frac{3}{4}\int_0^2 (2y^3-y^4)dy \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{4}y^4-\frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2 \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}16-\frac{1}{5}32\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(8-\frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{8}{5}\right) \\
&= \frac{24}{20} \\
&= \frac{6}{5},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y). \\ &= \frac{6}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

i.d) La moda de una variable aleatoria continua Y, está dada por

$$\frac{df(y)}{dy} = 0, \quad \text{siempre que} \quad \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \leq 0.$$

Para este caso se tiene:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{3}{4}(2y - y^2)\right] = \frac{3}{4}(2 - 2y) = \frac{3}{2}(1 - y),$$

puesto que en $y = 1$ la derivada de $f(y)$ es cero, y dado que

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = -\frac{3}{2},$$

se tiene que $y = 1$ es la moda de $f(y)$.

La mediana de una variable aleatoria continua está dada por $y \in [0, 2]$ tal que

$$\int_{-\infty}^{y} f(u)du = \frac{1}{2}, \; y = y_{0.5}$$

de manera que para este caso,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{y} f(u)du &= \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{y} \frac{3}{4}(2u - u^2)du \\ &= \frac{3}{4}\left(u^2 - \frac{1}{3}u^3\right)\Bigg|_0^y \\ &= \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{1}{3}y^3\right), \end{aligned}$$

puesto que $\frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)$ debe ser igual a $\frac{1}{2}$ se tiene que

$$y^2 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{2}{3}$$

donde se nota que una de sus raíces es $y = 1$. Dado esto, dicha expresión puede factorizarse como

$$(1 - y)\left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\right) = 0$$

Resolviendo el binomio se encuentra que las otras dos raíces son:
$y = 1 + \frac{\sqrt{12}}{2} \approx 2.73$ y $y = 1 - \frac{\sqrt{12}}{2} \approx -0.73$. Por ende, $y = 1$ es es la mediana de $f(y)$.

ii.a) Para que $g(y) = c(4y^2 - y) \geq 0$ con $y = 0, 1, 2$, $c \geq 0$ pues $(4y^2 - y) \geq 0$ dado R_Y.

A continuación se calculará el valor de c tal que se cumpla la segunda propiedad

$$\sum_{R_Y} g(y) = 1.$$

$$\begin{aligned}\sum_{R_Y} g(y) &= \sum_{y=0}^{2} c(4y^2 - y) \\ &= c[4(0)^2 - 0] + c[4(1)^2 - 1] + c[4(2)^2 - 2] \\ &= 0 + 3c + 14c \\ &= 17c\end{aligned}$$

de manera que $c = \frac{1}{17}$, puesto que $17c = 1$. Por tanto, la función de densidad es

$$g(y) = \frac{1}{17}(4y^2 - y) \qquad y = 0, 1, 2 \qquad \text{es de desnisidad.}$$

ii.b) Por la definición de la función de distribución

si $y < 0$,

$$\begin{aligned}G(y) &= \sum_{u \leq y} g(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{y} g(u) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Si $0 \leq y < 1$,

$$\begin{aligned}G(y) &= \sum_{u \leq y} g(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{y<0} g(u) + \sum_{u=0}^{y} g(u) \\ &= 0 + g(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Si $1 \leq y < 2$,

$$G(y) = \sum_{u \leq y} g(u)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u=-\infty}^{y<1} g(u) + \sum_{u=1}^{y} g(u) \\
&= F(0) + f(1) \\
&= 0 + \frac{3}{17} \\
&= \frac{3}{17}.
\end{aligned}$$

Si $2 \leq y < \infty$,

$$\begin{aligned}
G(y) &= \sum_{u \leq y} g(u) \\
&= \sum_{u=-\infty}^{y<2} g(u) + \sum_{u=2}^{y} g(u) \\
&= F(1) + f(2) \\
&= \frac{3}{17} + \frac{14}{17} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De manera que

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 1 \\ \frac{3}{17}, & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 1, & \text{si } y \geq 2. \end{cases}$$

ii.c) Dado $g(0) = 0$, $g(1) = \frac{3}{289}$ y $g(2) = \frac{14}{289}$, la esperanza y la varianza de Y son

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{R_Y} y g(y) \\
&= 0\,(0) + 1\left(\frac{3}{289}\right) + 2\left(\frac{14}{289}\right) \\
&= \frac{3}{289} + \frac{28}{289} \\
&= \frac{31}{289}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= \sum_{R_Y}[y - E(Y)]^2 g(y) \\
&= \left(0 - \frac{31}{289}\right)^2 (0) + \left(1 - \frac{31}{289}\right)^2 \left(\frac{3}{289}\right) + \left(2 - \frac{31}{289}\right)^2 \left(\frac{14}{289}\right) \\
&= 0 + \frac{66564}{83521}\left(\frac{3}{289}\right) + \frac{299209}{83521}\left(\frac{14}{289}\right) \\
&= \frac{199692}{24137569} + \frac{4188926}{24137569} \\
&= \frac{4288618}{24137569} \\
&= 0.1776.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6. Sea

$$f(z) = 1, \ z \in [0, a].$$

a) ¿$f(z)$ es de densidad?
b) Determine y grafique la función de distribución.
c) Calcule las siguientes probabilidades: $P(-0.5 < Z \leq 0.75)$, $P(-0.5 \leq Z \leq 0.75)$, $P(Z < 0)$ y$P(Z \geq 1)$,
d) ¿Cuál es la media, varianza, sesgo y curtosis de Z?
e) ¿Cómo cambian sus resultados si considera $z \in (0, a)$?

Solución.
a) La primera propiedad para que sea función de densidad se cumple independientemente del recorrido de Z, ya que $f(z) \geq 0$. Para hallar el valor de a, se analiza si se cumple la segunda propiedad, $\int\limits_{R_Z} f(z)dz = 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^a dz &= z\Big|_0^a \\
&= a \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

de lo que se concluye que para que $f(z)$ sea de densidad el recorrido de la variable Z debe ser $[0, 1]$.

b) Si $z \in (-\infty, 0]$,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{z} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{z} 0du \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $z \in [0, 1]$,

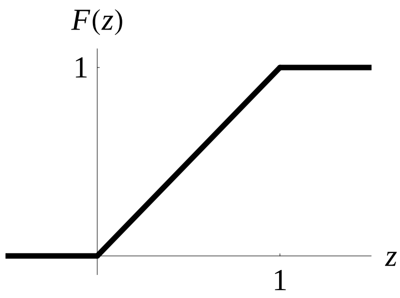
$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{z} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_{0}^{z} f(u)du \\ &= F(0) + \int_{0}^{z} du \\ &= u\Big|_{0}^{z} \\ &= z. \end{aligned}$$

Si $z \in [1, \infty)$,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{z} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{1} f(u)du + \int_{1}^{z} f(u)du \\ &= F(1) + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leq 0 \\ z, & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1, & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$



c)

$$\begin{aligned} P(-0.5 < Z \leq 0.75) &= P(-0.5 \leq Z \leq 0.75) \\ &= F(0.75) - F(-0.5) \\ &= 0.75. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z < 0) &= P(Z \leq 0) \\ &= F(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1) &= P(1 \leq Z < \infty) \\ &= \lim_{z \to \infty} F(z) - F(1) \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

d) En seguida se calcula la media de Z.

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{R_Z} z f(z) dz \\ &= \int_0^1 z dz \\ &= \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dado que

$$V(Z) = E(Z) - E^2(Z),$$

a continuación se determina $E(Z^2)$.

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int\limits_{R_Z} z^2 f(z)dz \\ &= \int\limits_0^1 z^2 dz \\ &= \frac{1}{3}z^3\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} V(Z) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Usando la definición de la varianza se tiene que

$$\begin{aligned} V(Z) &= E[(Z - E(Z))^2] \\ &= \int\limits_{R_Z} (z - E(Z))^2 f(z)dz \\ &= \int\limits_0^1 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 dz \\ &= \int\limits_0^1 \left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) dz \\ &= \int\limits_0^1 z^2 dz - \int\limits_0^1 z dz + \int\limits_0^1 \frac{1}{4} dz \\ &= E(Z^2) - E(Z) + \frac{1}{4}z\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

El sesgo está dado por

$$\begin{aligned}
S(Z) &= E[(Z-E(Z))^3] \\
&= \int_{R_Z} (z-E(Z))^3 f(z)dz \\
&= \int_0^1 \left(z-\frac{1}{2}\right)^3 dz \\
&= \int_0^1 \left(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{3}{4}z-\frac{1}{8}\right)dz \\
&= \int_0^1 z^3 dz - \frac{3}{2}\int_0^1 z^2 dz \\
&\quad +\frac{3}{4}\int_0^1 z dz - \frac{1}{8}\int_0^1 dz \\
&= E(Z^3)-\frac{3}{2}E(Z^2)+\frac{3}{4}E(Z)-\frac{1}{8}z\Big|_0^1,
\end{aligned}$$

pero como

$$\begin{aligned}
E(Z^3) &= \int_0^1 z^3 f(z)dz \\
&= \frac{1}{4}z^4\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
S(Z) &= E(Z^3)-\frac{3}{2}E(Z^2) \\
&\quad +\frac{3}{4}E(Z)-\frac{1}{8}z\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{1}{8} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Otra forma de calcular el sesgo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
S(Z) &= E[(Z - E(Z))^3] \\
&= \int_{R_Z} (z - E(Z))^3 f(z)dz \\
&= \int_0^1 \left(z - \frac{1}{2}\right)^3 dz \\
&= \int_0^1 \left(z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{8}\right) dz \\
&= \left(\frac{z^4}{4} - \frac{3}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{3}{4}\frac{z^2}{2} - \frac{1}{8}z\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por su parte la curtosis es

$$\begin{aligned}
C(Z) &= E[(Z - E(Z))^4] \\
&= \int_{R_Z} (z - E(Z))^4 f(z)dz \\
&= \int_0^1 \left(z - \frac{1}{2}\right)^4 dz \\
&= \int_0^1 \left(z^4 - 2z^3 + \frac{6}{4}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}\right) dz \\
&= \int_0^1 z^4 dz - 2\int_0^1 z^3 dz + \frac{6}{4}\int_0^1 z^2 dz - \frac{1}{2}\int_0^1 z dz + \frac{1}{16}\int_0^1 dz \\
&= E(Z^4) - 2E(Z^3) + \frac{3}{2}E(Z^2) - \frac{1}{2}E(Z) + \frac{1}{16}z\Bigg|_0^1,
\end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned}
E(Z^4) &= \int_0^1 z^4 f(z)dz \\
&= \frac{1}{5}z^5\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} C(Z) &= E(Z^4) - 2E(Z^3) + \frac{3}{2}E(Z^2) - \frac{1}{2}E(Z) + \frac{1}{16}z\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{80}. \end{aligned}$$

Otra forma de calcular la curtosis es

$$\begin{aligned} C(Z) &= E[(Z - E(Z))^4] \\ &= \int_{R_Z} (z - E(Z))^4 f(z)dz \\ &= \int_0^1 \left(z - \frac{1}{2}\right)^4 dz \\ &= \int_0^1 \left(z^4 - 2z^3 + \frac{6}{4}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}\right)dz \\ &= \left(\frac{z^5}{5} - 2\frac{z^4}{4} + \frac{3}{2}\frac{z^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{2} + \frac{1}{16}z\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{80}. \end{aligned}$$

e) Los resultados no se alteran si considera $z \in (0, a)$, ya que se trata de una variable aleatoria continua y la probabilidad en un punto específico del recorrido de la variable es cero.

Ejercicio 7. Sean $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $Y \sim U(a, b)$, $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ y

w	1	2	3
$f(w)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

variables aletorias.

a) Determine la función de distribución de estas variables aleatorias y grafique cada una.
b) Calcule $P(W \leq 1)$, $P(W < 1)$, $P(1 < W \leq 2)$, $P(1 \leq W \leq 2)$, $P(1 \leq W < 2)$ y $P(1 < W < 2)$.

Solución.
a) Sea

- $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad x \in R_X = \{0, 1\}.$
  Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{u \leq x} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{x} f(u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dado que $f(x) = 0,\ \forall x < 0.$
Si $0 \leq x < 1$,

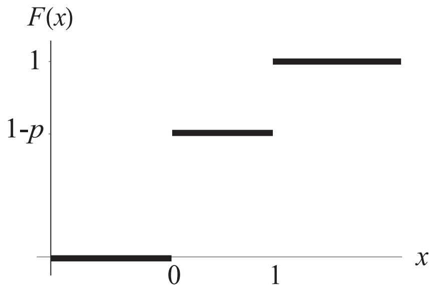
$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{u \leq x} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{x<0} f(u) + \sum_{u=0}^{x} f(u) \\ &= 0 + f(0) \\ &= p^0(1-p)^{1-0} \\ &= 1-p. \end{aligned}$$

Si $1 \leq x < \infty$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{u \leq x} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{0} f(u) + \sum_{u>0}^{x} f(u) \\ &= F(0) + f(1) \\ &= 1 - p + p^1(1-p)^{1-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1-p, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$



- $f(y) = \dfrac{1}{b-a}$.
  Si $y \in (-\infty, a]$,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{y} 0du \\ &= 0. \end{aligned}$$

  Si $y \in [a, b]$,

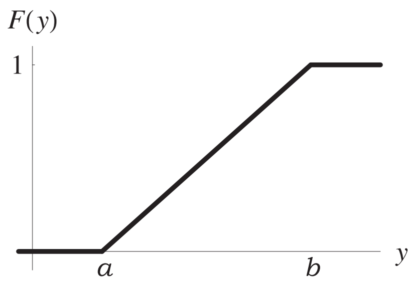
$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{a} 0du + \int_{a}^{y} \frac{1}{b-a}du \\ &= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{y} du \\ &= \frac{1}{b-a}u\Big|_{a}^{y} \\ &= \frac{y-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Si $y \in [b, \infty)$,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{y} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{b} f(u)du + \int_{b}^{\infty} 0du \\ &= F(b) \\ &= \frac{b-a}{b-a} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq a \\ \dfrac{y-a}{b-a}, & a \leq y \leq b \\ 1, & y \geq b. \end{cases}$$



- $f(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0. \end{cases}, \; z \in [0, \infty), \quad \lambda > 0.$

  Si $z \in (-\infty, 0]$,

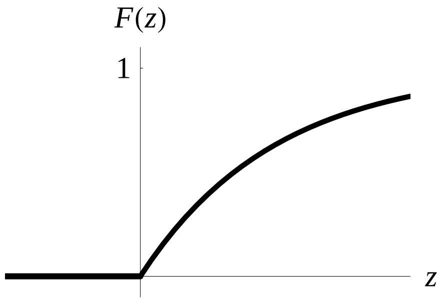
$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{z} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{z} 0du \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $z \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{z} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{z} f(u)du \\ &= \int_{0}^{z} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= -e^{-\lambda u}\Big|_0^z \\ &= 1 - e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

De manera que

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0. \end{cases}$$



- $f(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } w = 1 \\ \\ \frac{1}{4}, & \text{si } w = 2 \\ \\ \frac{1}{4}, & \text{si } w = 3 \end{cases}$

Si $w < 1$,

$$F(w) = \sum_{u \leq w} f(u)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{u=-\infty}^{w} f(u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dado que $f(w) = 0, \ \forall w < 1$.
Si $1 \leq w < 2$,

$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<1} f(u) + \sum_{u=1}^{w} f(u) \\ &= 0 + f(1) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $2 \leq w < 3$,

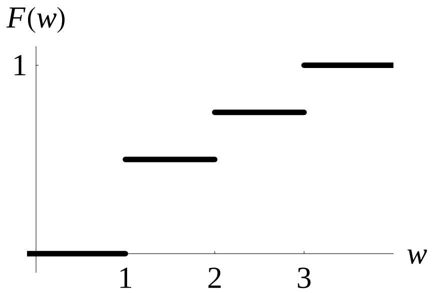
$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<2} f(u) + \sum_{u=2}^{w} f(u) \\ &= F(1) + f(2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Si $3 \leq w < \infty$,

$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{u \leq w} f(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{w<3} f(u) + \sum_{u=3}^{w} f(u) \\ &= F(2) + f(3) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que

$$F(w) = \begin{cases} 0, & w < 1 \\ \\ \dfrac{1}{2}, & 1 \leq w < 2 \\ \\ \dfrac{3}{4}, & 2 \leq w < 3 \\ \\ 1, & w \geq 3. \end{cases}$$



b)

$$\begin{aligned} P(W \leq 1) &= F(1) \\ &= \sum_{w \leq 1} f(w) \\ &= \sum_{w=1}^{1} f(w) \\ &= f(1) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$P(W < 1) = 0$, ya que los valores de $W < 1$, no están en R_W.

$$\begin{aligned} P(1 < W \leq 2) &= \sum_{w>1}^{2} f(w) \\ &= f(2) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 \leq W \leq 2) &= \sum_{w=1}^{2} f(w) \\ &= f(1) + f(2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq W < 2) &= \sum_{w=1}^{w<2} f(w) \\
&= f(1) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

$P(1 < W < 2) = 0$, puesto que ningún punto del intervalo (1,2) pertenece a R_W.

Ejercicio 8. Sea W una v. a. c. cuya función de distribución es la siguiente

$$
F(w) = \begin{cases} 0, & w < 0 \\ w + \frac{1}{2}, & 0 \leq w < \frac{1}{2} \\ 1, & w \geq \frac{1}{2}. \end{cases}
$$

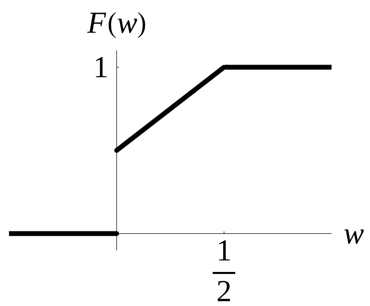
a) Grafique $F(w)$.

b) Muestre que $F(w)$ satisface las propiedades de la f^n distribución: $0 \leq F(w) \leq 1$ y $F(w) \geq 0$.

c) Calcule $P\left(W \leq \frac{1}{4}\right)$ y $P\left(0 \leq W \leq \frac{1}{4}\right)$ utilizando la función de distribución.

Solución.

a) Grafique $F(w)$.



b) Muestre que $F(w)$ satisface las propiedades de la f^n distribución: $0 \leq F(w) \leq 1$ y $F(w) \geq 0$.

c) Calcule

$$
P\left(W \leq \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right)
$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Dado que W es una variable aleatoria continua (vac),

$$\begin{aligned} P\left(0 \leq W \leq \frac{1}{4}\right) &= P\left(0 < W < \frac{1}{4}\right) \\ &= P\left(0 < W \leq \frac{1}{4}\right) \\ &= P\left(0 \leq W < \frac{1}{4}\right) \\ &= F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Si W es vac, $P(W = w) = 0$ (Este es un ejemplo de un evento con probabilidad 0 que no necesariamente es el evento imposible: $\emptyset$.)

Ejercicio 9. La función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

a) Calcule la función de densidad.

Solución.

a) Por definición $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 10. Considere las siguientes funciones de distribución de una variable aleatoria continua:

i. $G(x) = 1 - (1 + x)e^{-x}, \; x > 0$

ii. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \\ x - \dfrac{1}{2}, & \text{si } 1 \leq x < \dfrac{3}{2} \\ \\ 1, & \text{si } x \geq \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

a) Calcule $P(0.4 < X \leq 1.3)$, $P(X \geq 0.5)$, $P(X < 1.5)$ y $P(X \geq 1.5)$ usando la función de distribución.
b) Verifique sus resultados usando la función de densidad.
c) Grafique la función de densidad y la de distribución.

Solución.
i.a)

$$\begin{aligned} P(0.4 < X \leq 1.3) &= P(0.4 \leq X \leq 1.3) \\ &= G(1.3) - G(0.4) \\ &= [1 - (1+1.3)e^{-1.3}] - [1 - (1+0.4)e^{-0.4}] \\ &= 1.4e^{-0.4} - 2.3e^{-1.3} \\ &= 0.3116. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.5) &= P(0.5 \leq X < \infty) \\ &= \lim_{x\to\infty} G(x) - G(0.5) \\ &= \lim_{x\to\infty} [1 - (1+x)e^{-x}] - [1 - (1+0.5)e^{-0.5}] \\ &= 1 - [1 - 1.5e^{-0.5}] \\ &= 0.9098. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1.5) &= G(1.5) \\ &= 1 - (1+1.5)e^{-1.5} \\ &= 1 - 0.5578 \\ &= 0.4422. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1.5) &= P(1.5 \leq X < \infty) \\ &= \lim_{x\to\infty} G(x) - G(1.5) \\ &= \lim_{x\to\infty} [1 - (1+x)e^{-x}] - [1 - (1+1.5)e^{-1.5}] \\ &= 1 - [1 - 2.5e^{-1.5}] \\ &= 2.5e^{-1.5} \\ &= 0.5578. \end{aligned}$$

Con base en los dos últimos resultados:

$$P(X \geq 1.5) + P(X \leq 1.5) = 1$$

i.b) La función de densidad asociada a X es

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{dG(x)}{dx} \\ &= -[-(1+x)e^{-x} + e^{-x}] \\ &= (1+x)e^{-x} - e^{-x} \\ &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de densidad es

$$g(x) = xe^{-x}.$$

$$\begin{aligned} P(0.4 < X \leq 1.3) &= \int_{0.4}^{1.3} g(x)dx \\ &= \int_{0.4}^{1.3} xe^{-x}dx, \end{aligned} \tag{5}$$

integrando por partes:

$$u = x \qquad dv = e^{-x}$$

$$du = dx \quad v = -e^{-x},$$

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}dx &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5)

$$\begin{aligned} P(0.4 < X \leq 1.3) &= \int_{0.4}^{1.3} xe^{-x}dx \\ &= \big(- xe^{-x} - e^{-x}\big)\Big|_{0.4}^{1.3} \\ &= \big(- 1.3e^{-1.3} - e^{-1.3}\big) - \big(- 0.4e^{-0.4} - e^{-0.4}\big) \\ &= -2.3e^{-1.3} + 1.4e^{-0.4} \\ &= 0.3116. \end{aligned}$$

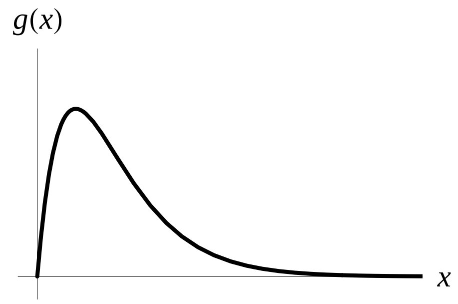
En los casos siguientes, se evalúa el resultado de la integral en el intervalo que corres-ponda.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 0.5) &= P(0.5 \leq X < \infty) \\
&= \int_{0.5}^{\infty} g(x)dx \\
&= \int_{0.5}^{\infty} xe^{-x}dx \\
&= \big(- xe^{-x} - e^{-x}\big)\Big|_{0.5}^{\infty} \\
&= \lim_{x \to \infty} \big(- xe^{-x} - e^{-x}\big) - \big(- 0.5e^{-0.5} - e^{-0.5}\big) \\
&= 0 + 1.5e^{-0.5} \\
&= 0.9098.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 1.5) &= P(-\infty < X \leq 1.5) \\
&= \int_{-\infty}^{1.5} g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1.5} xe^{-x}dx \\
&= 0 + \big(- xe^{-x} - e^{-x}\big)\Big|_{0}^{1.5} \\
&= -1.5e^{-1.5} - e^{-1.5} + 1 \\
&= 1 - 2.5e^{-1.5} \\
&= 0.4422.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1.5) &= P(1.5 \leq X < \infty) \\
&= \int_{1.5}^{\infty} g(x)dx \\
&= \int_{1.5}^{\infty} xe^{-x}dx \\
&= \big(- xe^{-x} - e^{-x}\big)\Big|_{1.5}^{\infty} \\
&= \lim_{x \to \infty} \big(- xe^{-x} - e^{-x}\big) - \big(- 1.5e^{-1.5} - e^{-1.5}\big) \\
&= 0 + 2.5e^{-1.5} \\
&= 0.5578.
\end{aligned}$$

i.c) Grafique las dos funciones.



ii.a)

$$\begin{aligned} P(0.4 < X \leq 1.3) &= P(0.4 \leq X \leq 1.3) \\ &= F(1.3) - F(0.4) \\ &= \left(\frac{13}{10} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{10}\right) \\ &= 0.6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.5) &= P(0.5 \leq X < \infty) \\ &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0.5) \\ &= \left(\lim_{x\to\infty} 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0.75. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X < 1.5) &= F(1.5) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1.5) &= P(1.5 \leq X < \infty) \\ &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(1.5) \\ &= \left(\lim_{x\to\infty} 1\right) - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii.b) La función de densidad de X es,

si $x \leq 0$ o $x \geq \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En resumen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x \leq \dfrac{3}{2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ende,

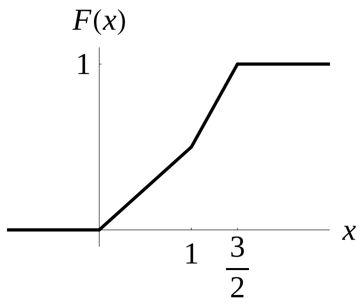
$$\begin{aligned} P(0.4 < X \leq 1.3) &= \int_{0.4}^{1.3} f(x)dx \\ &= \int_{0.4}^{1} \frac{1}{2}dx + \int_{1}^{1.3} dx \\ &= \frac{1}{2}x\Big|_{0.4}^{1} + x\Big|_{1}^{1.3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{10}\right) + 1.3 - 1 \\ &= 0.6. \end{aligned}$$

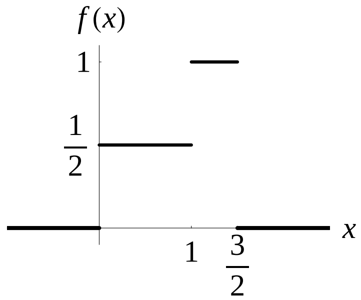
$$\begin{aligned} P(0.5 \leq X < \infty) &= \int_{0.5}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{0.5}^{1} \frac{1}{2}dx + \int_{1}^{1.5} dx + \int_{1.5}^{\infty} 0dx \\ &= \frac{1}{2}x\Big|_{0.5}^{1} + x\Big|_{1}^{1.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} - 1 \\ &= 0.75. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-\infty < X < 1.5) &= \int_{-\infty}^{1.5} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx + \int_{1}^{1.5} dx \\ &= \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{1} + x\Big|_{1}^{1.5} \\ &= \frac{1}{2} - 0 + \frac{3}{2} - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1.5 \leq X < \infty) &= \int_{1.5}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{1.5}^{\infty} 0dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii.c) Grafique las dos funciones.





Ejercicio 11. La función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(3-x), & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

a) Determine su función de distribución.

Solución.
a) Observe que para cualquier $x \leq 0$, $F(x) = 0$. Ahora, seleccione $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}ydy \\ &= F(0) + \frac{1}{4}y^2\Big|_0^x \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{4}.$$

Si $x \in [1, 2]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{1} f(y)dy + \int_{1}^{x} \frac{1}{2}dy \\ &= F(1) + \frac{1}{2}y\Big|_{1}^{x} \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Si $x \in [2, 3]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{2} f(y)dy + \int_{2}^{x} \frac{1}{2}(3-y)dy \\ &= F(2) + \frac{1}{2}\left(3y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{2}^{x} \\ &= \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) - (6-2)\right] \\ &= \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Si $x \in [3, \infty)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{3} f(y)dy + \int_{3}^{x} 0dy \\ &= F(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{3}{2}\right)3 - \left(\frac{1}{4}\right)3^2 - \frac{5}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De esta forma, la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{5}{4}, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$